求某些非线性偏微分方程特解的一种简便方法
试探函数法

● 刘式适[1*] 付遵涛[1,2] 刘式达[1,2] 赵 强[1]
1 北京大学物理学院 北京 100871
2 北京大学湍流与复杂系统研究国家重点实验室 北京 100871
*通讯作者 E-mail:liusk@pku.edu.cn

非线性动力学广泛地呈现在物理学、化学和生命科学等各个领域。自从20世纪60年代以来，它取得了突飞猛进的发展。一方面，从Lorenz研究大气热对流开始，论证了在大量的确定性系统中存在着对初值异常敏感的复杂运动形式——混沌；另一方面，大量的非线性常微分方程和偏微分方程求得了准确的特解，而且，求得特解的形式也是丰富多样的。

同样，从20世纪60年代开始，人们通过各种渠道（如散射反演、Bäckland变换等）求得了某些非线性偏微分方程（如KdV方程、非线性Schrödinger方程等）的某些特解（如孤立波解或包络孤立波解）。

大约从20世纪90年代开始，由于非线性科学在物理学、生命科学和地球科学等领域蓬勃发展的需要，非线性偏微分方程的求解也达到了空前的高潮，创立了许多求解的新方法，如齐次平衡法、双曲函数法、非线性变换法和正弦-余弦函数法等。但是，这些方法只能求得非线性偏微分方程的特定形式的特解，不能求得非线性偏微分方程其他形式的特解，而且，有些方法的运算相当繁琐。特别是对于那些包含了高阶导数项或高阶幂次非线性项的非线性偏微分方程来说，由于展开阶数是非整数或展开阶数很高，导致利用上述的一些方法求解会变得很困难或特别繁琐。这类方程有KdV-Burgers方程、Benney方程和含有高阶幂次非线性项的Fisher方程等等。

在他人研究的基础上，我们提出了试探函数法，使得上面提到的某些非线性偏微分方程的特解得以简便求得。由于此种方法简单明了，我们求得了一些在物理上十分有用的某些非线性偏微分方程的特解。这些特解对于近年来迅速发展的高精度（例如三阶至六阶精度格式）的数值试验也是非常有用的。因此，我们的研究结果受到国内外同行的热情关注，论文被大量引用。

目前，人们还在继续使用该方法，而且有把此种方法与其他方法相结合的趋势，从而可以简便地得到更多形式各样的特解。我们知道，线性方程的解满足解的叠加性原理；而对于非线性方程来说，类似于线性方程的解的叠加原理不再存在。然而，人们仍然希望了解在什么样的条件下非线性方程的特解能够形式上满足叠加原理，例如某个非线性方程的两个特定形式的解在特定条件下的组合仍然是该方程的解。可喜的是，有这方面部分结果已经在国内外刊物上报道，尽管有关研究还有待更深入地开展。当然，我们相信，随着时间的推移，将出现更多的求解非线性偏微分方程的方法，更多的解将会应用到解释自然科学的广泛实际问题和复杂现象中去。