



气候变化的长期记忆性: 理论基础与观测证实

刘式达, 袁乃明, 付遵涛*, 刘式适

北京大学物理学院大气与海洋科学系, 气候与海-气实验室, 北京 100871

*联系人, E-mail: fuzt@pku.edu.cn

收稿日期: 2013-05-28; 接受日期: 2013-08-14

国家自然科学基金资助项目(批准号: 41175141)

摘要 多尺度的气候变化具有显著的长期记忆性或持续性. 本文利用分数阶微积分、功率谱、自相关函数等方面的知识, 推导出导致气候变化长期记忆性的理论基础: 气候变化显著的长期记忆性是其变化分数阶累积的结果, 其变化的功率谱指数是分数阶积分阶数的二倍. 最后利用去趋势涨落分析方法从实际的观测序列分析证实了这一关系的合理性.

关键词 长期记忆性, 气候变化, 分数阶积分, 观测序列

PACS: 92.60.Ry, 92.70.Gt, 02.50.Ey, 05.40.Fb

doi: 10.1360/132013-250

1 引言

当前, 气候变化已经成为科学界最关心的前沿问题. 从科学上讲, 研究它的困难之处主要在于气候系统是一个多尺度系统, 气候变化的尺度可以是月尺度、年尺度、年代际尺度, 甚至于百年、千年、万年……千万年尺度. 在这种多尺度系统中, 气候变化中的冷暖或旱涝离开尺度去谈是毫无意义的. 因为冷暖或旱涝是随着尺度变化而变化的. 现在常谈到的气候变暖, 应该确切地说是指近百年尺度上的气候变化. 从更长的千年尺度上讲, 现在气候变化处于冷期; 从短的尺度上讲, 1998年以来的气温总是低于1998年的.

同时, 气候变量, 如温度距平也是一个随机量. 在各种时间尺度上, 都有大大小小不同强度的涨落.

究竟未来气候是如何变化? 这是人们非常关注的问题. 所以, 自从1963年著名的气象学家 Lorenz^[1]发现混沌以来, 很多学者致力于可预报性的研究. 严格地讲, 可预报性的研究涉及系统的记忆性问题. 从直观上讲, 没有一天天气是相同的, 可预报的时间长度仅有几天. 但是, 气候变化相对于天气扰动而言是有较好的记忆性的. 本文就是从来理论和实际观测角度来论证气候变化的记忆性.

2 描述气候变化的分数阶随机微分方程

1976年气象学家 Hasselmann^[2]认为天气扰动这个随机变量 ε 看起来是毫不相关的白噪声, 它被比作布朗运动^[3]的分子间相互作用的随机涨落, 而气候变化的距平 x 可以比作布朗运动浮在水面上的花粉, 它

引用格式: 刘式达, 袁乃明, 付遵涛, 等. 气候变化的长期记忆性: 理论基础与观测证实. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 1327-1331

Liu S D, Yuan N M, Fu Z T, et al. The long-term memory of climatic changes: theoretical foundation and observational confirmation (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2013, 43: 1327-1331, doi: 10.1360/132013-250

是 ε 强迫的结果. 因此, 他将气候随机变量 x 和天气随机变量 ε 之间的关系用 Longevin 方程

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t) \quad (1)$$

来表示.

(1)式意味着气候随机变量 x 的一阶微商是天气随机变量 ε , 或天气随机变量 ε 的一次积分是气候随机变量 x . 因此, 从某种意义上, 它反映了天气变化和气候变化之间的关系. 因为气候从概念上讲, 它是天气在某种意义上的平均状态(即积分).

但是, 用(1)式描述气候变化有两大缺点. 第一个缺点是布朗运动认为分子的尺度和花粉的尺度是相互分离的, 实际上天气尺度和气候的各种尺度之间是不能完全分开的. 第二个缺点是从功率谱 $S(f)$ 上看, 物理上 $S(f)$ 代表单位频率 f 上的能量. 若将 $S(f)$ 写成如下形式:

$$S(f) \sim f^{-\beta}. \quad (2)$$

其中 β 称为功率谱指数.

对于白噪声 ε 来说, 它的功率谱指数为 $\beta=0$, 而 ε 的一次积分称为布朗噪声 x , 它的功率谱指数为

$$\beta = 2. \quad (3)$$

根据实际观测资料看, 气候变化的功率谱指数并不是 $2^{[4]}$, 而且 x 的概率密度分布函数若是正态分布, x 大于 3 倍标准差的概率仅为 10^{-7} . 实际上冷暖或旱涝的大涨落的概率虽然小, 但是远比正态分布的大, 因此, 实际的气候随机变量是一个长尾巴的概率分布.

因为功率谱 $S(f)$ 和自相关函数 $R(\tau)$ 互为傅里叶变换, 所以, (1)式中气候变量 x 的自相关函数是指数函数形式

$$R(\tau) \sim e^{-\tau/T}. \quad (4)$$

其中 T 为特征时间.

从(4)式看出, 当 $\tau = T$ 时, 自相关函数已经衰减了 $1/e=1/2.7$. 所以(4)式是短程相关, 这与气候过程的实际情况也是不符的.

我们在 2007 年将气候变化与天气扰动的关系^[5] 用分数阶导数的随机微分方程

$$\frac{d^q x}{dt^q} = \varepsilon(t) \quad (5)$$

描述, 其中 x 可以表示为 ε 的 q 阶积分, 其定义如下:

$$x(t) = \frac{d^{-q} \varepsilon}{dt^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \frac{\varepsilon(u)}{(t-u)^{1-q}} du. \quad (6)$$

ε 称为 x 的 q 阶导数, 它可以表示为

$$\varepsilon = \frac{d^q x}{dt^q} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d^{-(1-q)} x}{dt^{-(1-q)}} \right]. \quad (7)$$

它称为 Riemann-Liouville 分数阶导数^[6]. (7)式表示先对 x 求 $(1-q)$ 次积分再求一阶导数, 就是 q 阶导数的定义.

若 x 自相关函数是幂函数形式

$$R(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \sim e^{-\tau^\gamma}. \quad (8)$$

因为 $R(\tau)$ 的量纲和 $fS(f)$ 的量纲相等, 所以

$$\tau^{-\gamma} = f^{1-\beta} = \tau^{-(1-\beta)}. \quad (9)$$

因此, 得到

$$\gamma = 1 - \beta. \quad (10)$$

(10)式说明自相关函数的标度指数 γ 和功率谱的标度指数 β 之和为 1. 若要保证气候变量的自相关函数是缓慢衰减的幂函数形式, 那么按(10)式要求

$$0 < \beta < 1. \quad (11)$$

因此, 若用(1)式描述气候变化, $\beta=2$ 不符合长程相关的要求(11)式. 因此需要把气候变量的功率谱指数由 $\beta=2$ 降到 $0 < \beta < 1$.

模式(5)却能做到这一点. 因为 $x(t)$ 的傅里叶变换 $\hat{x}(f)$ 为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{ift} df. \quad (12)$$

功率谱 $S(f)$ 是傅里叶变换系数模的平方, 即

$$S(f) = |\hat{x}(f)|^2 \sim f^{-\beta}. \quad (13)$$

将(12)式微商 q 次的功率谱有什么变化呢? 由(12)式

$$\frac{d^q x}{dt^q} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) (if)^q e^{ift} df, \quad (14)$$

因此, x 的 q 阶导数的功率谱为

$$S_q(f) = |\hat{x}(f) \times f^q|^2 \sim f^{-(\beta-2q)}. \quad (15)$$

由(15)式看出, x 的 q 阶导数的功率谱 $S_q(f)$ 的标度指数为 $\beta-2q$, 确实降了下来. 因为 ε 的功率谱指数为零, 由(5)式得到

$$\beta = 2q. \quad (16)$$

这样, 由(5)式描述的气候变量 x 的功率谱为

$$S(f) \sim f^{-2q}. \quad (17)$$

若 $q=1$, (5)式就变成(1)式, 功率谱指数为 2. 现在功率谱指数为 $2q$, 由(11)式得到

$$0 < q < \frac{1}{2}, \quad (18)$$

即可符合要求.

因此, 分数阶导数气候模型的导数阶数只要符合(18)式, 就可以使得气候变化的短程相关(4)式变成长程相关(8)式. 即

$$R(\tau) = \tau^{1-2q}. \quad (19)$$

3 气候变化的记忆性好

模式(5)式不但使得气候变化具有长程相关性, 也使得气候变化的记忆性好.

由(6)式, 对于时间 $t_2 > t_1$ (将积分分成 0 到 t_1 和 t_1 到 t_2 两段)得到

$$\begin{aligned} x(t_2) - x(t_1) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_2} \frac{\varepsilon(u)}{(t_2 - u)^{1-q}} du \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} \frac{\varepsilon(u)}{(t_1 - u)^{1-q}} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} [(t_2 - u)^{q-1} - (t_1 - u)^{q-1}] \\ &\quad \cdot \varepsilon(u) du - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - u)^{q-1} \varepsilon(u) du. \quad (20) \end{aligned}$$

若 $q=1$ 时, (20)式右端积分为零, 因而

$$x(t_2) - x(t_1) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(u) du = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(u) du. \quad (21)$$

从(21)式可知, 若知道 x 的初值 $x(t_1)$, 那么 $x(t_2)$ 仅仅由 $\varepsilon(u)$ 的初值 $x(t_1)$ 和 $\varepsilon(u)$ 来决定, 绝不需要 x 在时刻 t_1 之前的任何信息. 因而, 这是一个记忆性比较差的系统.

但是, 若 $q \neq 1$ 时, (20)式右端第一个积分一般不为零, 那么计算 $x(t_2)$ 时必须知道从 $t=0$ 直到 t_2 的整个历史, 因此具有长记忆性.

4 DFA 方法确定 q

用去趋势涨落分析方法 (Detrended Fluctuation Analysis, DFA)^[7]可以由气候随机变量观测资料确定方程(5)中的微商阶数 q . 根据 DFA 方法, 方差函数

$$F^2(s) \sim s^{1+2q}, \quad (22)$$

那么

$$\ln F(s) \sim (1+2q) \ln s. \quad (23)$$

其中 s 是窗口尺度, 相当于延迟时间 τ .

因此, 在双对数($\ln F$, $\ln s$)坐标中拟合出的直线的斜率 α 与微商阶数 q 的关系为

$$\alpha = q + \frac{1}{2}, \quad (24)$$

从而有

$$q = \alpha - \frac{1}{2}. \quad (25)$$

5 实际资料分析验证

上面给出的是理论分析结果, 实际的气候随机变量给出的结果又如何呢? 下面以瑞典斯德哥尔摩观测站的日平均气温序列来确认上述理论结果的可靠性. 选择这一序列的原因是其观测记录时间长(1901-1-1 至 2000-12-31), 统计性更可信. 同时, 这一序列也在众多的研究中得到了广泛的应用^[8-10], 证明数据质量是可靠的. 图 1 给出的是其中的一段时间的观测结果, 其中图 1(a)给出的日距平序列(扣除多年平均后的扰动序列), 直观上体现出很明显随机性; 图 1(b)给出的年平均序列, 相比于图 1(a), 年平均的气温变化更规则, 有更强的周期性.

对于气温日平均距平序列利用功率谱分析可以得到对应的功率谱特征, 见图 2. 从图 2 中可以看出, 在高低频段功率谱具有显著不同的幂律行为 $S(f) \sim f^{-\beta}$. 在高频部分, 是典型的宽谱行为, 功率谱指数为 $\beta=1.64$; 而在低频部分, 功率谱指数为 $\beta=0.48$. 很显然, 无论是在高频段还是在低频段, 都与白噪声和布朗运动行为不同. 利用第 2 节得到的利用功率谱指数与微商阶数的关系 $\beta=2q$, 可知微商阶数在高频段应该为 $q=0.82$, 在低频段应该为 $q=0.24$.

对于气温日平均距平序列利用 DFA 分析方法可以得到温度扰动的持续性特征, 见图 3. 从图 3 可以看出, 无论是在大尺度区间还是小尺度范围内, 方差函数随窗口尺度或延迟时间的变化都具有显著的幂律变化 $F(s) \sim s^\alpha$, 在小尺度范围标度指数 $\alpha=1.32$, 在大尺度范围标度指数 $\alpha=0.74$. 由上一节到得到标度指数 α 与微商阶数 q 的关系 $q=\alpha-(1/2)$, 可以得到在小尺度范围微商阶数 $q=0.82$, 在大尺度范围微商阶数 $q=0.24$.

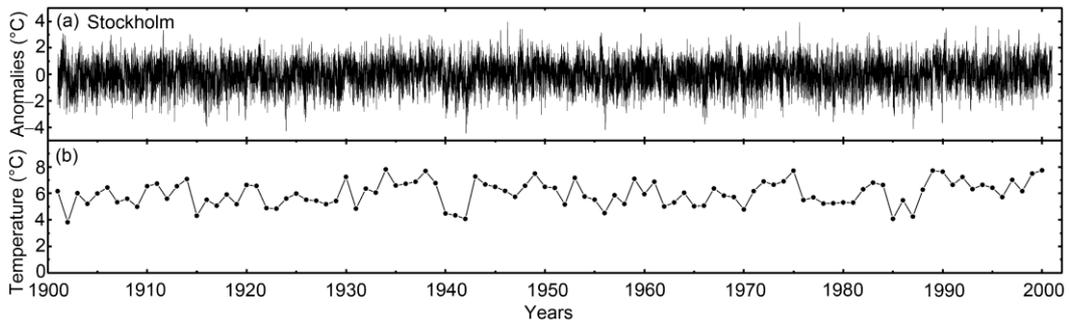


图 1 斯德哥尔摩观测站的气温序列

(a) 日平均距平序列, (b) 年平均序列

Figure 1 Segment of temperature series over Stockholm. (a) Daily mean anomalous series, (b) annual mean series.

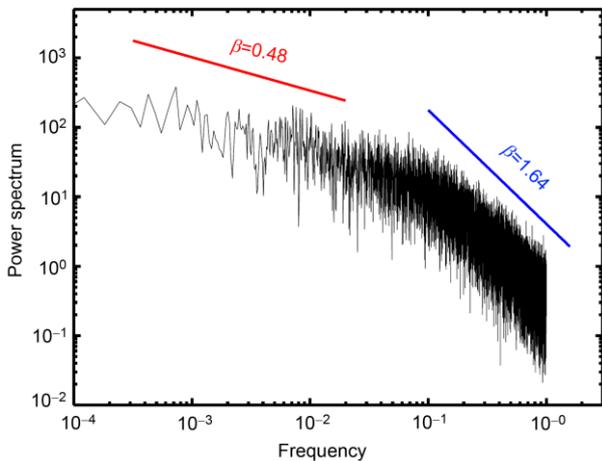


图 2 (网络版彩图)斯德哥尔摩观测站的气温日平均距平序列的功率谱分析结果

Figure 2 (Color online) Power spectrum analysis on the daily mean anomalous temperature series over Stockholm.

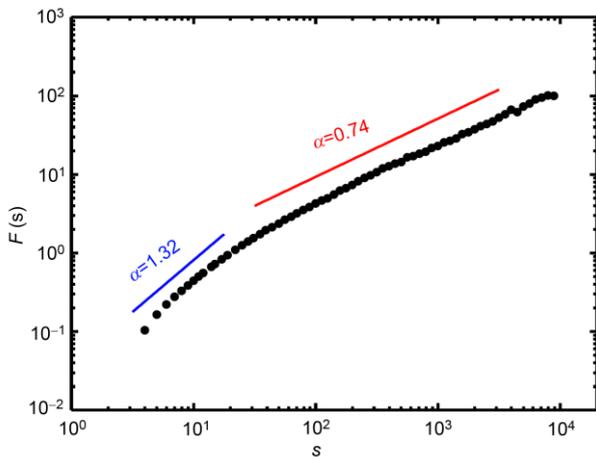


图 3 (网络版彩图)斯德哥尔摩观测站的气温日平均距平序列的去趋势涨落分析结果

Figure 3 (Color online) Detrended fluctuation analysis on the daily mean anomalous temperature series over Stockholm.

对比利用功率谱指数与微商阶数的关系得到微商阶数结果和利用 DFA 分析方法从观测资料直接确定微商阶数结果可以看出, 无论在物理空间的大尺度范围和谱空间的低频段, 还是在物理空间的小尺度范围和谱空间的高频段, 两者得到的微商阶数都是一致的. 这从观测资料分析中确认了上述理论关系的成立.

同时, 可以对图 1 中的日平均距平序列进行洗牌处理(保持原始序列的幅值, 但是在时间轴上的出现位置随机化), 并对洗牌处理后的序列积分 q 次(这里 $q=0.24$)得到积分序列. 对积分序列做功率谱分析, 同样也可以确认上述理论关系, 见图 4. 从图中可以清楚地看出, 洗牌序列的功率谱指数为 $\beta=0$, 而积分 $q=0.24$ 次后的积分序列的功率谱指数为 $\beta=0.48$, 为分

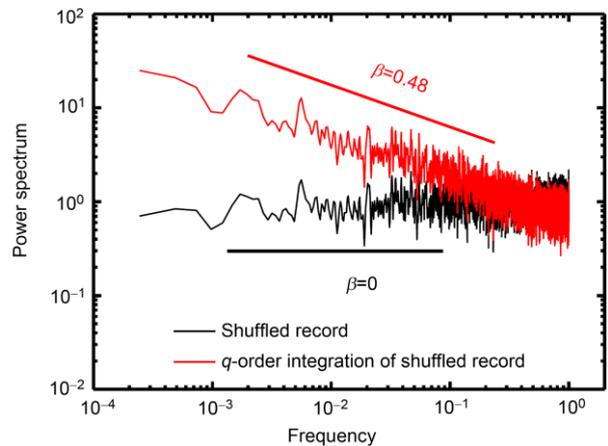


图 4 (网络版彩图)同图 2, 原始序列的洗牌序列与洗牌序列的积分序列的结果

Figure 4 (Color online) Same as Figure 2, but for the shuffled daily mean anomalous temperature series over Stockholm and its integration series.

数阶积分阶数的二倍. 这从人工合成资料分析中进一步确认了上述理论关系的成立.

6 结论

通过把分数阶导数引入到气候扰动变化的建模

描述, 利用量纲分析从理论上得到了功率谱指数与分数阶导数阶数满足的关系. 同时, 这一关系也得到了实际观测序列分析结果的证实. 这一研究结果对于深入研究气候变化的长期记忆性与极值事件关系、气候极值事件的形成机理等方面都有非常重要的参考价值.

参考文献

- 1 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. *J Atmos Sci*, 1963, 20: 130–141
- 2 Hasselmann K. Stochastic climate model, Part I theory. *Tellus*, 1976, 28: 473–485
- 3 Mandelbrot B B, van Ness J W. Fractional Brown motions, fractional noise and applications. *SIAM Rev*, 1968, 10: 422–437
- 4 Dmowska R, Saltzman B. *Advance in Geophysics: Long-Range Persistence in Geophysical Time Series*. London: Academic Press, 1999. 14–16
- 5 Liu S D, Shi S Y, Liu S K, et al. Bridge between weather and climate: fractional derivative (in Chinese). *Meteorol Sci Technol*, 2007, 35(1): 15–19 [刘式达, 时少英, 刘式适, 等. 天气和气候之间的桥梁——分数阶导数. *气象科技*, 2007, 35(1): 15–19]
- 6 陈文, 孙洪广, 李西成, 等. 力学与工程问题的分数阶导数建模. 北京: 科学出版社, 2012. 11–54
- 7 Kantelhardt J W, Koscielny-Bunde E, Rego H H A, et al. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Phys A*, 2001, 295: 441–454
- 8 Qian C, Fu C B, Wu Z H, et al. On the secular change of spring onset at Stockholm. *Geophys Res Lett*, 2009, 36: L12706
- 9 Moberg A, Bergstrom H. Homogenization of Swedish temperature data. Part III: The long temperature records from Uppsala and Stockholm. *Int J Climatol*, 1997, 17: 667–699
- 10 Linderholm H W, Walther A, Chen D. Twentieth-century trends in the thermal growing season in the Greater Baltic Area. *Clim Change*, 2008, 87: 405–419

The long-term memory of climatic changes: theoretical foundation and observational confirmation

LIU ShiDa, YUAN NaiMing, FU ZunTao* & LIU ShiKuo

Department of Atmospheric and Oceanic Sciences and Laboratory for Climate and Ocean-Atmosphere Studies, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China

The multi-scale climatic changes take the dominant long-term memory or long-term persistence. In this paper, based on the knowledge from fractional integral, power spectrum and self-correlation function, the mechanism resulted in this feature has been derived that the exponent of power spectrum is twice the order of fractional integral. Finally, this theoretical relation has been confirmed by the results from the observational temperature record analysis by the method of detrended fluctuation analysis.

long-term memory, climatic changes, fractional integral, observational confirmation

PACS: 92.60.Ry, 92.70.Gt, 02.50.Ey, 05.40.Fb

doi: 10.1360/132013-250