*) 共振态和窄宽度近似 (Narrow width Approximation)

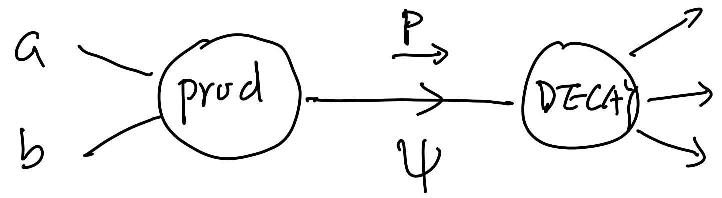
我们曾经给出共振态产生和衰变的公式

$$\sigma(A+B \to R \to C+D+\cdots)$$

$$= \frac{4\pi s}{k^2}\left[\frac{(2S_R+1)\,C_R}{(2S_A+1)(2S_B+1)\,C_A C_B}\right]\frac{\Gamma(R\to AB)\,\Gamma(R\to C+D\cdots)}{(s-m_R^2)^2+m_R^2\Gamma_R^2}$$

前面我们通过非相对论性公式类比从而得到上公式。现在我们给出详细推导。

以费米子共振态单独产生过程为例



ψ粒子衰变末态取作为n

散射振幅为

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{prod}(\cdots)\,\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+im\Gamma}\,\mathcal{M}_{Decay}(\cdots)$$

$$= \sum_s \mathcal{M}_{prod}(\cdots\psi_s)\,\frac{1}{p^2-m^2+im\Gamma}\,\mathcal{M}_{Decay}(\bar{\psi}_s\cdots)$$

散射振幅模方为

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \sum_{ss'} \mathcal{M}_p^{+}(\cdots\psi_s)\,\mathcal{M}_p(\cdots\psi_{s'})\,\frac{1}{(p^2-m^2)^2+m^2\Gamma^2}$$

$$\mathcal{M}_D^{+}(\bar{\psi}_s\cdots)\,\mathcal{M}_D(\bar{\psi}_{s'},\cdots)$$

$$= |\mathcal{M}_{Decay}(\bar{\psi}\cdots)|^2\,\frac{1}{(p^2-m^2)^2+m^2\Gamma^2}\,|\mathcal{M}_{prod}(\cdots\psi)|^2$$

可证明相空间具有如下的分解形式

$$d\Phi_n = d\Phi_1 \frac{1}{2\pi} dp^2 d\Phi_n$$

利用

$$\int dp^2 \frac{1}{(p^2-m^2)^2+m^2\Gamma^2} \xrightarrow{\Gamma_t \to 0} \frac{\pi}{m_t \Gamma_t} \delta(p^2-m^2)$$

可得

$$\sigma(ab \to \psi \to c\cdots) = \int |M|^2 d\Phi_n$$

$$= \int |M_{prod}(\cdots\psi)|^2 d\Phi_1 \, dp^2 \delta(p^2-m^2)$$

$$\times \int \frac{\pi}{(2\pi) m\Gamma} |M_{Decay}|^2 d\Phi_n$$

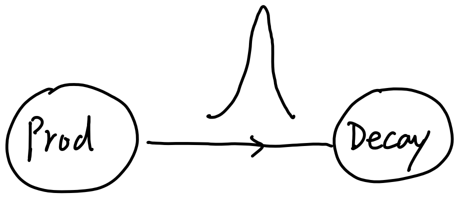
$$= \sigma_{prod}(ab \to \psi) \times \frac{1}{\Gamma} \frac{1}{2m} \int |M_{Decay}|^2 d\Phi_n$$

$$= \sigma_{prod}(ab \to \psi) \times \frac{\Gamma(\psi \to c+d\cdots)}{\Gamma}$$

$$= \sigma_{prod}(ab \to \psi) \times Br(\psi \to c+d+\cdots)$$

注意：将此过程因子化成产生和衰变两个过程的前提假设是 $\Gamma \ll M$（窄宽度近似）

窄宽度近似的物理图像



$$\frac{\Gamma}{M} \ll 1$$

$$Q_{prod} = M \Longrightarrow \tau_{prod} = \frac{1}{M}$$

$$\tau_{Decay} = \frac{1}{\Gamma}$$

所以, $$\frac{\tau_{prod}}{\tau_{Decay}} = \frac{\frac{1}{M}}{\frac{1}{\Gamma}} = \frac{\Gamma}{M} \ll 1$$

窄宽度近似 ($\Gamma/M \ll 1$) 就意味着

所研究的共振态粒子在很短时间内产生,再经过很长时间衰变,

$\Longrightarrow$ 产生和衰变过程之间关联可以忽略

$$\sigma(ab \to \psi \to cd\cdots) \approx \sigma(ab \to \psi) \times Br(\psi \to cd\cdots)$$

注意:

我们在100 GeV附近发现的粒子 $W^\pm/Z^0/H/t$ 都满足窄宽度近似。但除 H^0 之外,其他三个粒子都具有自旋,因此其产生和衰变过程存在自旋关联,无法简单地因子化。

如果我们仅关心总截面(或 inclusive rate,对所有可能末态都求和),那么我们仍然可以利用NWA来计算

$$\sigma(ab \to X \to cd) = \sigma(ab \to X) \otimes Br(X \to cd)$$

$$(X = W^\pm/Z/t)$$