# 粒子物理

## 24. 质量起源和对称性自发破缺

曹庆宏

北京大学物理学院

$$\mathcal{L}_{fk} = \bar{\nu}_L i\not\partial \nu_L + \bar{e} i \not\partial e$$ ← kinetic terms

$$+ \frac{g_2}{2\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e + \frac{g_2}{2\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu$$ ← charge currents

$$+ \frac{g}{4C_\theta} Z_\mu \bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu$$ ← Neutral currents

$$+ g S_\theta \underbrace{(-1)}_{Q} A_\mu \bar{e}\gamma^\mu e + \frac{g}{4C_\theta} Z_\mu \bar{e}\gamma^\mu\left[\underbrace{(-1+2S_\theta^2)}_{2(T_3-QS_\theta^2)}(1-\gamma_5) + \underbrace{(2S_\theta^2)}_{-2QS_\theta^2}(1+\gamma_5)\right]e$$

使用相应的 Q 和 $T_3$ $\Longrightarrow$ 夸克的弱相互作用

3) 场的电荷和弱同位旋 $T_{3L}$ 和超荷 Y 相关联

$$Q = T_{3L} + \frac{Y}{2}$$

注意："不同"场的 $T_{3L}$ 和 Y 量子数不同

（不同手征性质的场应被视作为不同场）

| | $T_{3L}$ | $Y$ | $Q$ |
|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix}\nu \\ e^-\end{pmatrix}_L$ | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | $0$ |
| | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-1$ |
| $e_R$ | $0$ | $-2$ | $-1$ |
| $\begin{pmatrix}u \\ d\end{pmatrix}_L$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| $u_R$ | $0$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| $d_R$ | $0$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| $\underline{\Phi} = \begin{pmatrix}\frac{v+H+i\phi^0}{\sqrt{2}} \\ i\phi^-\end{pmatrix}$ | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | $0$ |
| | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-1$ |

colored objects $\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}_{SU(3)}$

$$e_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)e$$

$$\begin{aligned}
\overline{e_L} &= (e_L)^\dagger \gamma_0 \\
&= \left(\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)e\right)^\dagger \gamma_0 \\
&= e^\dagger \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma^0 \\
&= e^\dagger \gamma^0 \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5) \\
&= \overline{e}\, \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)
\end{aligned}$$

1) 我们已经得到费米子和规范玻色子之间，以及规范玻色子之间的相互作用，但所有粒子都是无质量的

例如，$m_W^2 W_\mu^a W^{a\mu}$ 和 $m_u \bar{u} u$ 都不是规范不变的

$$u_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)u = P_L u \qquad \bar{u}_L = \bar{u} P_R$$

$$u_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)u = P_R u \qquad \bar{u}_R = \bar{u} P_L$$

$$P_L + P_R = 1$$

$$P_L P_R = 0$$

$$\bar{u}_L u_L = \bar{u} P_R P_L u = 0$$

$$\bar{u}_R u_R = 0$$

$$(P_L)^2 = P_L$$

$$(P_R)^2 = P_R$$

$\Rightarrow$ 不为零的质量项组合为 $\underline{\bar{u}_L} u_R$ 或 $\bar{u}_R u_L$

SU(2) 二重态

(not gauge invariant)

$\Rightarrow$ 引入一个场和 $\bar{u}_L u_R$ 形成规范不变组合 (单态)

(量纲为1)

2) 费米子的Yukawa相互作用

$$\mathcal{L}_{fH}=\frac{\sqrt{2}m_u}{v}(\bar{u}_L\ \bar{d}_L)\Phi u_R+\frac{\sqrt{2}m_d}{v}(\bar{u}_L\ \bar{d}_L)(-i\tau_2\Phi^*)d_R+h.c.$$

其中 $\Phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v+H+i\phi^0 \\ i\phi^1-\phi^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{v+H+i\phi^0}{\sqrt{2}} \\ i\phi^- \end{pmatrix}$

$$\Phi^*=\begin{pmatrix} \frac{v+H-i\phi^0}{\sqrt{2}} \\ -i\phi^+ \end{pmatrix} \qquad -i\tau_2\Phi^*=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}\Phi^*=\begin{pmatrix} +i\phi^+ \\ \frac{v+H-i\phi^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

其中 $\phi^0=\phi^3$

$\phi^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1\mp i\phi^2)$

是和对称性自发破缺相联系的 Goldstone 玻色子

$v$ 是对称性破缺的特征能标 ($v=246\,\mathrm{GeV}$)

$m_{u,d}$ 是 u 夸克和 d 夸克的质量

3) 在讨论对称性自发破缺之前，我们先看一下费米子质量

$\Longrightarrow$ 仅需考虑 互场中的 $\frac{v}{\sqrt{2}}$ 项

即 $\frac{\sqrt{2}m_u}{v}(\bar{u}_L\ \bar{d}_L)\begin{pmatrix}\frac{v}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}u_R+\frac{\sqrt{2}m_d}{v}(\bar{u}_L\ \bar{d}_L)\begin{pmatrix}0\\\frac{v}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}d_R+h.c.$

$$= m_u\bar{u}_L u_R + m_d\bar{d}_L d_R + h.c.$$

$$= m_u(\bar{u}_L u_R+\bar{u}_R u_L)+m_d(\bar{d}_L d_R+\bar{d}_R d_L)$$

$$= m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d$$

注意：$\mathcal{L}_{fH}$ 也给出费米子和希格斯粒子之间的相互作用

$\longrightarrow$ 被称作为 Yukawa 耦合

# 弱规范玻色子质量——希格斯机制

标准模型拉氏量的标量部分

$$\mathcal{L}_\Phi = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - \lambda\left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2}\right)^2$$

其中 $\Phi = \begin{pmatrix} \frac{v+H+i\phi^0}{\sqrt{2}} \\ i\phi^- \end{pmatrix}$ $\quad \Phi^\dagger = \left( \frac{v+H-i\phi^0}{\sqrt{2}} \quad -i\phi^+ \right)$

$\Phi$是无色的SU(2)二重态的复数标量场，$v \simeq 246\,\mathrm{GeV}$

$(\phi^0, \phi^1, \phi^2)$或$(\phi^0, \phi^\pm)$是Goldstone玻色子，在对称性自发破缺之后被矢量规范玻色子$W^\pm$和$Z$"吃掉"，成为其纵向极化分量，从而使其获得质量。

（无质量的矢量玻色子仅有两种横向极化）

4.2) 为使 $\mathcal{L}_{\Phi}$ 变为规范不变，

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \mathbb{1}\partial_\mu - i g_1 \frac{Y}{2}\mathbb{1} B_\mu - i g_2 \frac{\tau^j}{2} W_\mu^j$$

在规范变换下，

$$U = e^{-i g_1 \frac{Y}{2}\theta - i g_2 \frac{\tau^j}{2}\theta^j}$$

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = U\Phi,$$

$$D_\mu\Phi \longrightarrow (D_\mu\Phi)' = U(D_\mu\Phi)$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}_{\Phi}$ 是规范不变的

$\mathcal{L}_{\Phi}$ 的自由度

$$\underbrace{B,\ W^1,\ W^2,\ W^3}_{\text{每个都有两种极化}},\ H,\ \phi^0,\ \phi^1,\ \phi^2 \Rightarrow 2\times(1+3)+1+3 = 12$$

(5) 希格斯机制如何工作？弱规范玻色子如何获得质量？

在 Unitary 规范中，

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^\dagger \Phi = \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(v+H)^2$$

$$(D^\mu \Phi) = \left[ \begin{pmatrix} \partial^\mu & 0 \\ 0 & \partial^\mu \end{pmatrix} - ig_1\left(\frac{-1}{2}\right)\begin{pmatrix} B^\mu & 0 \\ 0 & B^\mu \end{pmatrix} - ig_2\left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} W^3 & W^1 - iW^2 \\ W^1 + iW^2 & -W^3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu H - ig_1\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}B^\mu\right) - ig\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)W^3 \\ -ig_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2}W^-\right)\frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$(D_\mu \Phi)^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu H + ig_1\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}B_\mu\right) + ig_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)W_\mu^3 & ig_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2}W^+\right)\frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{4} g_2^2 W^- W^+ (v+H)^2$$

$$+ \frac{(v+H)^2}{2}\left(\frac{1}{4} g_1^2 (B_\mu B^\mu) + \frac{1}{4} g_2^2 (W_\mu^3 W^{3\mu}) - \frac{1}{4} g_1 g_2 B_\mu W^{3\mu} - \frac{1}{4} B^\mu W_\mu^3\right)$$

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{4} g_2^2 W^- W^+ (v+H)^2$$

$$+ \frac{1}{8}(v+H)^2 \underbrace{\begin{pmatrix} W^3 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2 g_1 \\ -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3 \\ B \end{pmatrix}}_{}$$

$$\begin{pmatrix} Z & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^2 + g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}$$

$$g_1 = g_2 \tan\theta_W , \quad \begin{pmatrix} W^3 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}$$

因为 $g_1^2+g_2^2=g_2^2\left(1+\frac{g_1^2}{g_2^2}\right)=g_2^2(1+\tan\theta_W)=\frac{g_2^2}{C_\theta^2}$

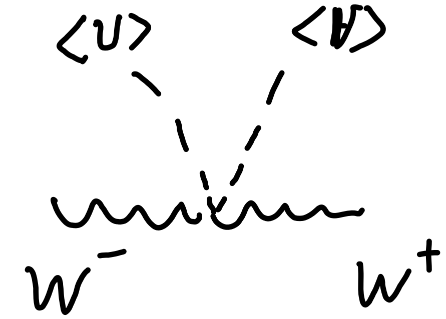
$$\Rightarrow \mathcal{L}_\Phi=\frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H)+\frac{1}{4}g_2(v+H)^2W_\mu^-W^{+\mu}$$

$$+\frac{1}{8}\frac{g_2^2}{C_\theta^2}(v+H)^2Z_\mu Z^\mu+\text{"}0\text{"}\cdot A_\mu A^\mu$$

$$-\lambda\left(\frac{1}{2}(v+H)^2-\frac{v^2}{2}\right)^2$$

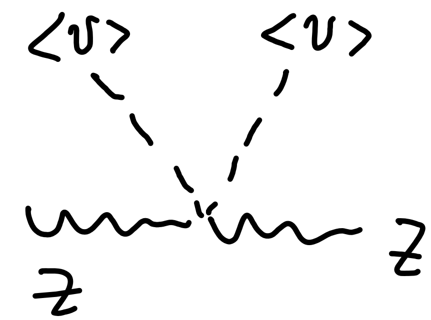
上面拉氏量中，$W^{\pm}$ 和 $Z^0$ 获得质量，而光子无质量

$$\frac{1}{4} g_2^2 v^2 W_\mu^- W^{+\mu} \equiv m_W^2 W_\mu^- W^{+\mu}$$




$$\Rightarrow m_W = \frac{1}{2} g v$$

$$\frac{1}{8} \frac{g_2^2}{c_\theta^2} v^2 Z_\mu Z^\mu = \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu$$




$$\Rightarrow m_Z = \frac{1}{2} \frac{g v}{c_\theta}$$

注意：在树图水平 $\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 c_\theta^2} = 1$ （著名的 $\rho$ 参数也即 oblique 参数中的 T 参数）

## 4.4) 希格斯质量

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) - \lambda\left(vH + \frac{H^2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda v^2 H^2 = -\frac{1}{2} m_H^2 H^2 \quad \Rightarrow \quad m_H = \sqrt{2\lambda}\, v$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) - \frac{1}{2} m_H^2 H^2$$

下面我们重新数一下自由度

$$\underset{\substack{m=0 \\ (2个极化)}}{A},\ \underbrace{W^+,\ W^-,\ Z^0}_{\substack{m\neq 0 \\ (3个极化)}},\ H \quad \Rightarrow \quad 2+3\times(3)+1 = \underline{\underline{12}}$$

4.5) 希格斯机制 — 对称性自发破缺

(物理体系的对称性大于系统基态的对称性)

为方便讨论，我们重新选取希格斯二重态

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

下面我们分析一下体系的对称性。最一般性的可重整的拉氏量为

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi)^+ (D^\mu \Phi) - V(\Phi)$$

其中 $V(\Phi) = \mu^2 (\Phi^+ \Phi) + |\lambda| (\Phi^+ \Phi)^2$

当$\mu^2<0$时 体系的能量最低值并在$\phi=0$处，而是在 $v=\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$ 处

$$\langle\phi\rangle_0=\begin{pmatrix}0\\ \frac{v}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\equiv|0\rangle_{vaccum}=|0\rangle$$

此真空同时破坏 $SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 对称性 $\longrightarrow U(1)_{em}$

注意：

if $e^{i\alpha\hat{g}}|0\rangle=|0\rangle \Longrightarrow$ $|0\rangle$ is invariant under a generator $\hat{g}$

$$\Longrightarrow (1+i\alpha\hat{g})|0\rangle=|0\rangle$$

$$\Longrightarrow \hat{g}|0\rangle=0$$

而此:

$$\tau_1|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{Broken!}$$

$$\tau_2|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{iv}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{Broken}$$

$$\tau_3|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{Broken}$$

$$Y|0\rangle = Y_\phi|0\rangle = +1\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{Broken}$$

虽然4个生成元都无法令真空态不变，但它们的线性组合却可以令$|0\rangle$不变

$$\hat{Q}|0\rangle = \frac{1}{2}(\tau_3+Y)|0\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Y_\phi+1 & 0 \\ 0 & Y_\phi-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{unbroken!!!}$$

虽然 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 都被破坏了，但其生成元$(\tau_3, Y)$的线性组合 $\hat{Q}_{em}$ 却仍未被真空所破缺，（即相应的规范场$A_\mu$无质量）

# 对称性自发破缺

假设：自然界中充满着自旋为0的标量场 —— 希格斯场

（SU(2)空间中二重态，非0超荷）

这和我们熟悉的电磁场类似，

只不过电磁场来源于荷电粒子，而希格斯场是无源的

（至少在这个课程中我们这样理解）

费米子和弱规范玻色子同希格斯场相互作用从而获得质量

$\Rightarrow$ 体系的基态（真空）带有非0的 $SU(2)_W$ 和 $U(1)_Y$ 的量子数

所以 $SU(2)_W$ 和 $U(1)_Y$ 对称性被体系的基态破坏了。

拉氏量具有某种对称性 而物理基态并不具备此对称性

$\Longrightarrow$ 对称性自发破缺

1) 实标量场

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right)$$

$\lambda$ 和 $\mu^2$ 是标量场势函数的参数

$\lambda > 0 \Rightarrow$ 体系具有能量最低态

定理：若一厄米算符 $\hat{H}$ 有下限但无上限（即，对任一常数 $c$，存在一个态矢 $|\rangle$ 使得 $\frac{\langle|\hat{H}|\rangle}{\langle|\rangle}$ 大于 $c$），那么，所有 $\hat{H}$ 的本征矢的集合 $\{|n\rangle\}$ 是完全的

（证明详见李政道《粒子物理讲义》）

注意：此拉氏量在 $\phi \to -\phi$ 变换下保持不变

（反演对称性）

为得到粒子谱，我们

① 首先需要找到整个体系的基态，也即势函数的最小值；

② 其次将场量在能量基态附近展开来得到激发态（微扰展开）

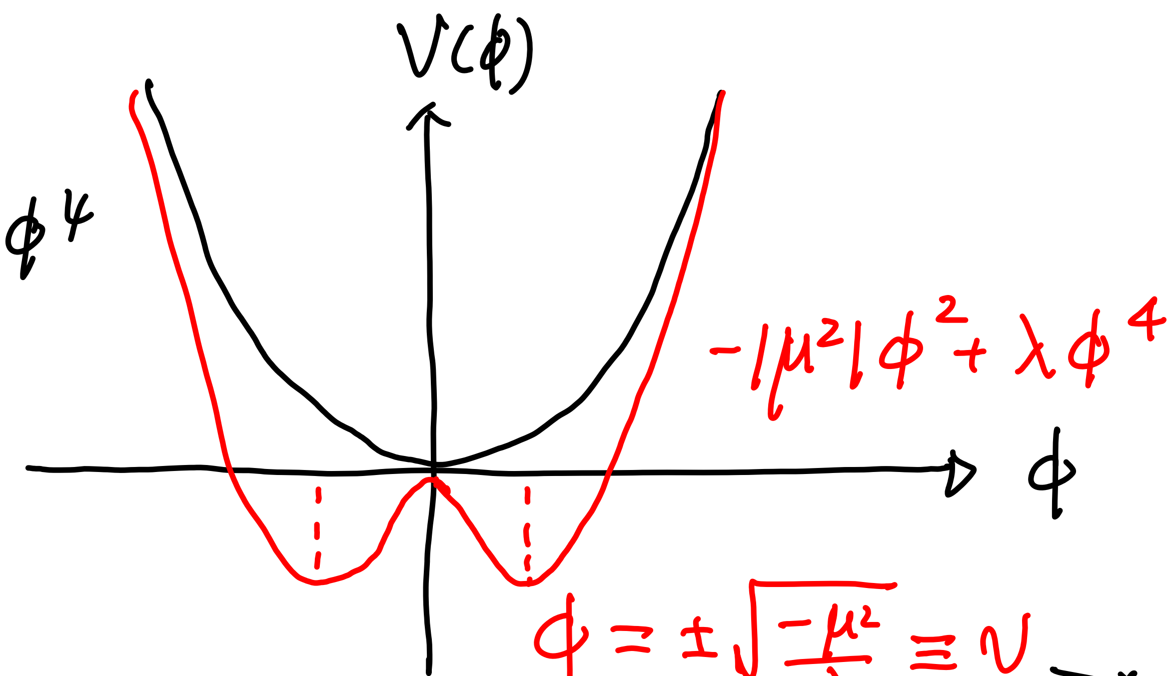
在量子场论中，我们 $\begin{cases}\text{将能量最低态称作为真空态} \\ \text{将激发态称作为粒子}\end{cases}$

*) $\mu^2 > 0$ ： 真空态 $\longrightarrow \phi = 0 \qquad V_{min} = 0 \big|_{\phi=0}$

*) $\mu^2 < 0$ ： $\dfrac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0 \Rightarrow \phi = \pm\sqrt{\dfrac{-\mu^2}{\lambda}}$

$$E_{min} = \underbrace{T_{min}}_{\rightsquigarrow\ \phi(x) = \text{常数}} + V_{min} \Longrightarrow \phi(x) = 0 \text{ 并不对应于 } V_{min}$$

$$V(\phi) = -|\mu^2|\phi^2 + \lambda\phi^4 = |\mu^2|\phi^2 + \lambda\phi^4 - 2|\mu^2|\phi^2$$




$\phi = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \equiv v$ → 真空期待值 VEV (Vacuum Expectation Value)

粒子谱:

在基态附近 $\phi(x) = v + \eta(x)$

我们也可选择

$\phi(x) = -v + \eta(x)$

但并不影响物理观测,因为拉氏量具有

$\phi \to -\phi$ 不变性

将 $\phi(x) = v + \eta(x)$ 代入到拉氏量中可得

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta) - (\underbrace{\lambda v^2 \eta^2}_{\text{mass term}} + \underbrace{\lambda v \eta^3 + \frac{1}{4}\lambda \eta^4}_{\eta\text{场自相互作用}}) + \text{constant}$$

$$m_\eta^2 = 2\lambda v^2 = -2\mu^2$$

⊛ 毫无疑问，如果我们可以精确物理体系，那么 $\phi$ 和 $\eta$ 两种描述必然是完全等价的。但如果我们采用微扰论来研究或所研究的问题无法精确求解，那么我们只能在基态附近做微扰来得到收敛的结果。

⊛ $\phi \to -\phi$ 的对称性被破坏了，因为我们选择 $+v$

真空选取（$+v$ 或 $-v$）不具备 $\phi \to -\phi$ 对称性

$\Rightarrow$ 其解也不具备此对称性，表现为 $\eta^3$ 出现

2) 复标量场 $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2$$

此拉氏量具有全局U(1)对称性

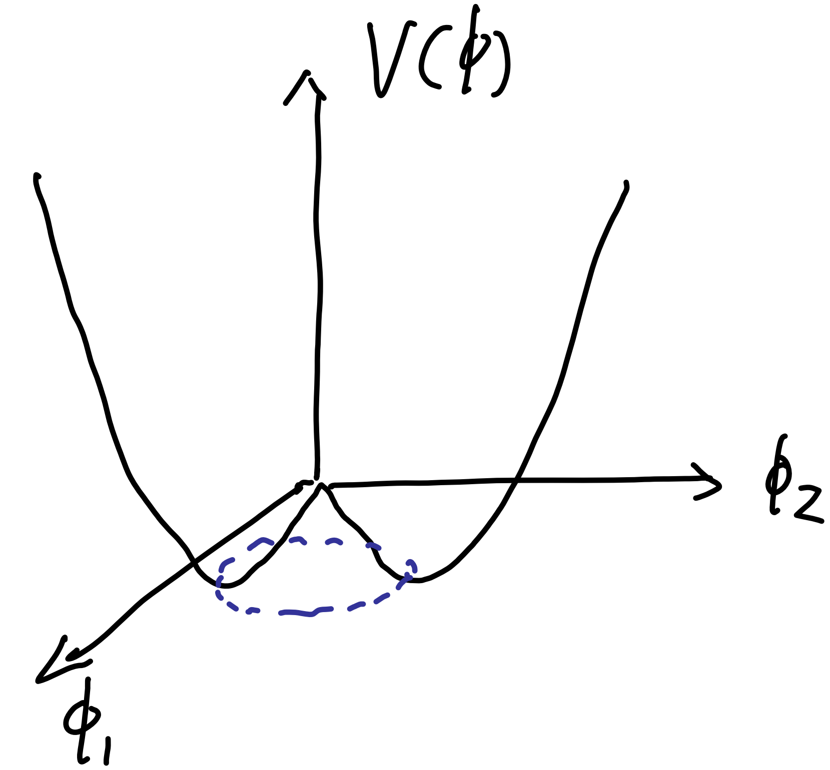
$$\phi \to \phi' = e^{i\chi}\phi$$

将$\mathcal{L}$写作实标量场分量形式

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

*) $\mu^2>0$, $V_{min}=V\big|_{\substack{\phi_1=0\\ \phi_2=0}}$

*) $\mu^2<0$, $V_{min}=V\big|_{\phi_1^2+\phi_2^2=-\frac{\mu^2}{\lambda}=v^2}$




显然，真空是简并的 $\nearrow$

类似于前例，我们可在 $V_{min}$ 处做场量展开。我们可选择 $\phi_1^2+\phi_2^2=v^2$ 圆环上任意一点作为真空

$\Longrightarrow$ 破坏原有对称性

简单起见，取 $\phi_1=v$，$\phi_2=0$，则

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(v+\eta(x)+i\rho(x)\right)$$

代入到拉氏量中得

$$\mathcal{L}_\phi=\frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2+\underline{\mu^2\eta^2}$$

$m_\eta^2=2|\mu^2|$

$$-\lambda v(\eta\rho^2+\eta^3)-\frac{\lambda}{2}\eta^2\rho^2-\frac{\lambda}{4}\eta^4-\frac{\lambda}{4}\rho^4$$

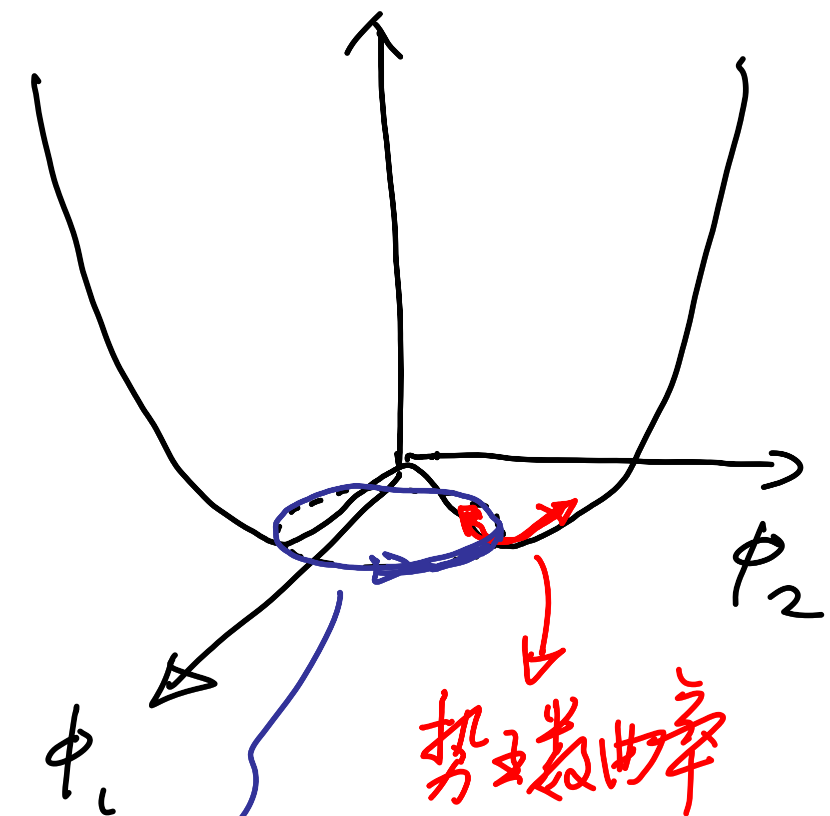
$+$ 常数项

$\phi(x) = \eta(x)\, e^{-i\rho(x)}$

⊛ $m_\rho = 0$ ⟶ Goldstone粒子

定理：

当连续的全局对称性自发破缺时，必然会产生一个无质量，自旋为0的玻色子（称为Goldstone粒子）




此圆环上处处能量相等。在环上移动不作功 $\Rightarrow m_\rho = 0$

势函数曲率产生质量 $m_\eta \neq 0$

3) Abelian Higgs 机制

上例中SSB给出一个奇怪的无质量的标量粒子，但我们从来观测到这样的粒子。Why? Where did they go?

下面我们将上例中的全局 U(1) 对称性改作局域 U(1) 对称性

$$U(1)_{global} \longrightarrow U(1)_{local}$$

即 $\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu$

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu' = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \chi(x)$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\chi(x)}\phi(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

⊛ 当 $\mu^2>0$ 时，质量为 $\mu^2$ 的带电标量场和光子相互作用

(取 $g=e$)

⊛ 当 $\mu^2<0$ 时，$\mathcal{L}$ 中有4个自由度 ($\phi_1$, $\phi_2$, $A_\mu$(2个极化))

令 $\phi(x) = \eta(x)\, e^{-i\rho(x)}$，其中 $\eta(x)$, $\rho(x)$ 都是实数场

我们可以选取规范函数 $\chi(x)$ 使得 $\qquad \phi \to e^{i\chi(x)}\phi$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + h(x)\right)$$

代入到 $\mathcal{L}$ 中

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \overbrace{\frac{1}{2} g^2 v^2}^{m_A = gv \neq 0} A_\mu A^\mu - \lambda v^2 h^2 - \lambda v h^3$$
$$- \frac{1}{4} h^4 + g^2 v h A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} g^2 h^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

粒子谱：一个实标量场 $h$，$m_h = \sqrt{2\lambda v^2}$

一个有质量的规范玻色子 $A_\mu$，$m_A = gv$

(在 $A_\mu$ 的质心系中 $A_\mu$ 有3种自旋态 $J_z = +1, 0, -1$)

总计有4个自由度：$h + A_\mu(3)$

在破缺前也有4个自由度 $\phi_1$, $\phi_2$ $A_\mu(2)$

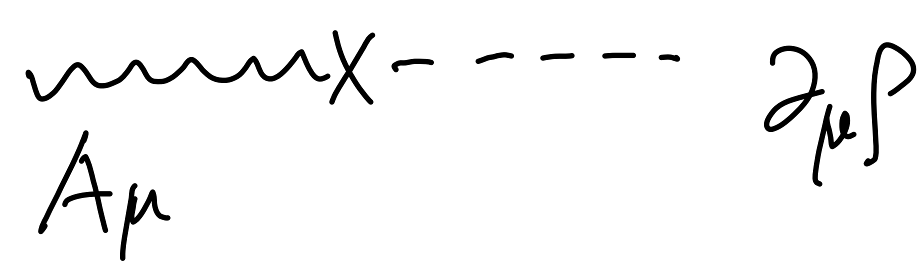
*) 例2中的Goldstone粒子成为有质量 $A_\mu$ 粒子的纵向极化态。

*) 如果我们不选取特殊规范令 $\phi(x)=\frac{v+h(x)}{\sqrt{2}}$，

而是采用一般形式 $\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(v+\eta(x)+i\rho(x)\right)$，

那么 $\mathcal{L}$ 中将出现

$$A_\mu\partial^\mu\rho$$




即 $A_\mu$ 在传播过程中会转化为 $\rho$

通过对角化得到质量本征态（可通过规范变换实现）

可以从 $\mathcal{L}$ 中消去 $\rho$

$\Longrightarrow$ 此即通常所讲的"规范玻色子吃掉Goldstone粒子"

4) 标准模型的希格斯机制

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \qquad \phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4)$$

在 $SU(2)_W$ 空间中 $\phi^+$ 和 $\phi^0$ 通过旋转相关联.

① 拉氏量:

$$\mathcal{L}_\Phi = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

$$\Phi^\dagger \Phi = (\phi^{+*} \ \ \phi^{0*}) \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \phi^{+*}\phi^+ + \phi^{0*}\phi^0$$

$$= \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2)$$

当$\mu^2<0$时 $V_{min} = V\Big|_{\Phi^\dagger\Phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}}$

显然，真空态是简并的

$$\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2+\phi_4^2 = v^2$$

（4d 空间中的球面 — O(4) 对称性）

我们选取真空态如下

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$ 即 $\phi_3 = v$

$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$

（会破坏电荷守恒）

④ 粒子谱：

Unitary Gauge

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+H(x) \end{pmatrix}$$

对任意的 $\Phi(x)$，我们总可以做规范变换，

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = e^{i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}(x)}{v}}\Phi(x)$$

将 $\Phi(x)$ 旋转成 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+H(x) \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ "Gauge away" 3个场，成为 $W^{\pm}, Z^0$ 的纵向分量

选取$|0\rangle$同时破坏$SU(2)_W$和$U(1)_Y$

$$\vec{\tau}|0\rangle = \vec{\tau}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix} \neq 0, \quad Y|0\rangle = Y\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix} \neq 0$$

但 $Q|0\rangle \equiv \frac{1}{2}(\tau_3 + Y)\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \quad SU(2)_W \times U(1)_Y \xrightarrow[|0\rangle]{SSB} U(1)_{em}$$

$$(m_\gamma = 0)$$

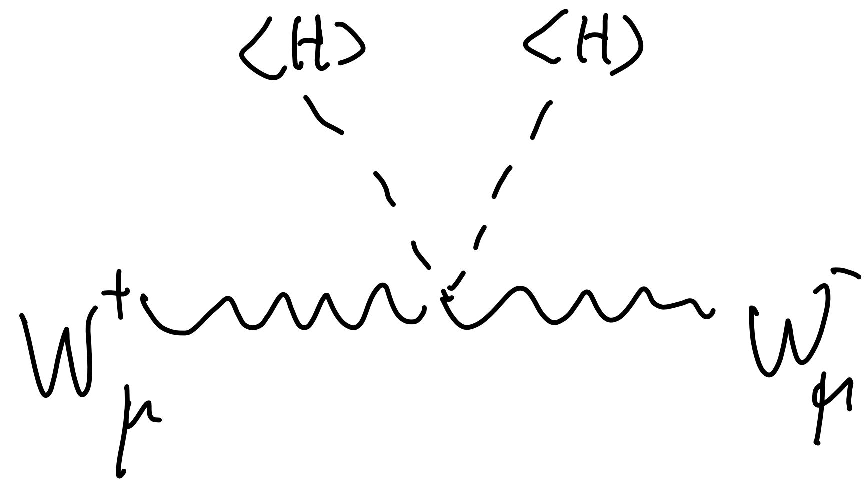
※ 自由度

$(m_\gamma = 0)$

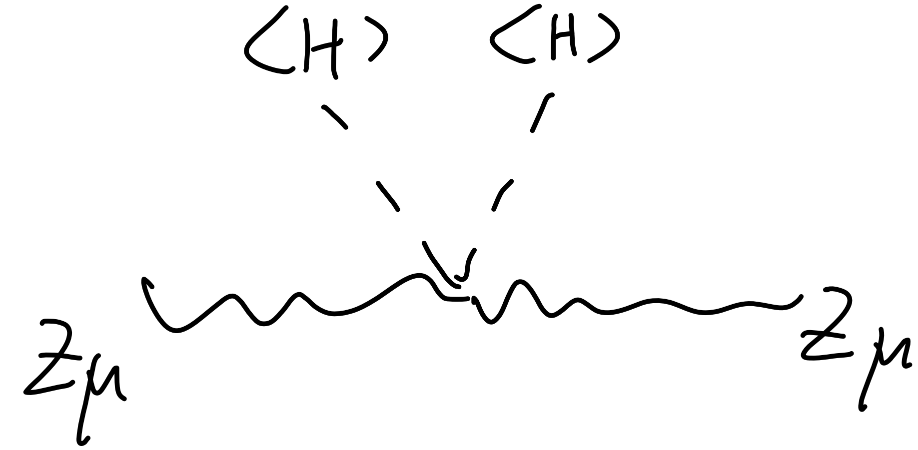
$$SU(2)_W \times U(1) \longrightarrow U(1)_{em}$$

$$\underbrace{\begin{array}{l} B^\mu,\ W_1^\mu,\ W_2^\mu,\ W_3^\mu \quad (2\times 4) \\ \phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \phi_4 \quad (4) \end{array}}_{3\times 4 = 12} \qquad \underbrace{\begin{array}{l} A_\mu\ (2) \\ W_\mu^+,\ W_\mu^-,\ Z_\mu^0 \quad (3\times 3) \\ H\ (1) \end{array}}_{2+3\times 3+1 = 12}$$

# Mass generations

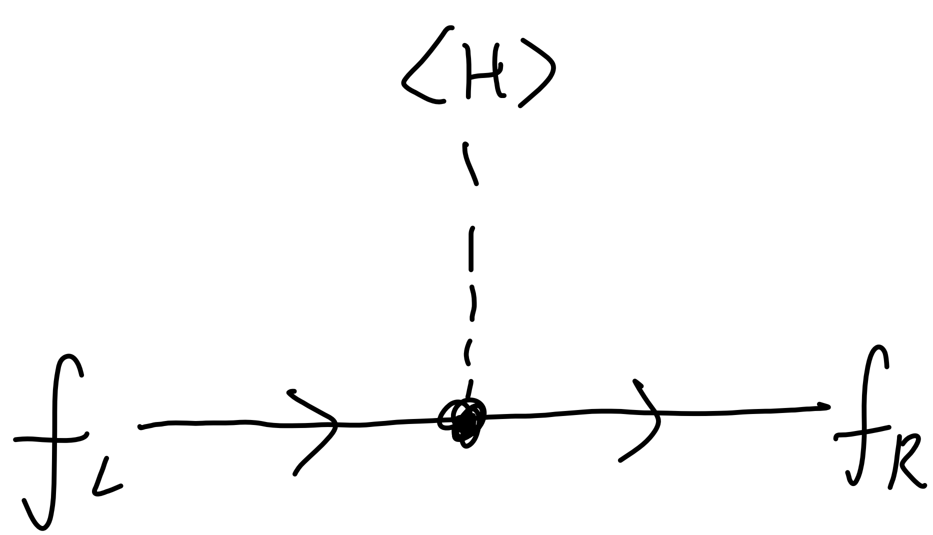



$$m_W = \frac{1}{2} g v$$




$$m_Z = \frac{gv}{2c_\theta} = \frac{m_W}{c_\theta}$$

$$\left( \rho = \frac{m_W}{m_Z \cos\theta_W} = 1 \right)$$




$$m_f = y_f \frac{v}{\sqrt{2}}$$

## ⊛ Vacuum Energy (宇宙学常数问题)

$$\phi = v \Rightarrow V(\phi = v) = V_0 = -\frac{1}{2}\lambda v^4$$

$$v = 246\,\mathrm{GeV} \Rightarrow |V_0| \approx 2\times 10^9\,\mathrm{GeV}^4 \times (\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\,\mathrm{GeV}^3 \approx 1.3\times 10^{41}\,\mathrm{cm}^{-3} \\ \lambda \sim 0.1 \end{array}\right\} \Rightarrow V_0 \sim 10^{49}\,\mathrm{GeV}/\mathrm{cm}^3$$

!!!

Exp: $\left.\begin{array}{l}\text{luminous matter in Universe} \\ \text{density} \approx 1\ \text{proton}/\mathrm{m}^3\end{array}\right\}$ $V_{\text{expirical}} \approx 10^{-4}\,\mathrm{GeV}/\mathrm{cm}^3$