粒子物理

第 13 节
粒子物理中的对称性

曹庆宏

北京大学物理学院理论物理所

(本节课件基于高崇寿老师讲义)

Symmetries play a central role in particle physics; one aim of particle physics is to discover the fundamental symmetries of our universe.

We will first discuss the basic idea of symmetry in this lecture and then apply it to the quark model later with the aim of

- Deriving hadron wave-functions
- Providing an introduction to the more abstract ideas of colour and QCD
- Ultimately explaining why hadrons only exist as qq (mesons) qqq (baryons) or qqq (anti-baryons)

1. 对称和对称性

1）对称和破缺

2）变换和对称的分类

1. 对称和破缺

对称性是人们在观察自然和认识自然过程中所产生的一种观念。在自然界千变万化的运动演化过程中，显现出各式各样的对称性。

太阳是一个球体，而球体在绕过中心的任意轴旋转某一角度后，其形状和位置都不显现任何可以觉察的变化。球体的这种性质称为绕球心的旋转对称性。正是因为如此，没有人会说看到太阳横过来后倒过来了。

如果要想确切判断球体是否绕过中心的任意轴转了一个角度，就需要在球上添加某些记号，根据这些记号的位置变化来判断球是否作了转动。实际上，这些记号的作用就是使球不再具有严格的旋转对称性，亦即在一定程度上破坏了旋转对称性。物理学上称这种情况为对称性的破缺。

自然界千变万化的运动演化，从一个侧面来说，就体现为显现出各式各样的对称性，同时又通过这些对称性的演化和破缺来反映出运动演化的特点。

日夜交替是人们最熟知的自然现象，24 小时的昼夜循环，在时间上显现出具有周期性的平移对称。

但是，我们无法根据日夜交替的特点来区分任何两天。为了能够区分和判断它，就需要找到对称性破缺的表现。

人们在长期的生活中，发现昼夜的时间长短比例和夜间星群的分布都有相似的周期性变化，而且月亮每天的位置和形状也不相同。后来，逐渐有了年的概念，并产生了历法。

从对称性的角度来看，地球上的生活环境显现出以 24 小时为周期的时间平移对称性。但这个对称性又有微小的破缺，它提供了不同的两天之间的区分依据，同时通过这个破缺又显现出年的周期对称性和农历月的周期对称性。

如果日的周期对称性严格的不破缺，那就不可能显现出年的周期对称性和农历月的周期对称性。

从一定意义上来说，运动的多样性的一个重要表现是自然界同时显现出多种不同类型的对称性。

这些对称性相互交织在一起，在演化过程中不断有对称性发生破缺，同时往往又显现出新的对称性来。

因此研究自然现象中显现的各种对称性，研究它们产生和破缺的演化规律，是人们认识自然规律的一个重要方面。

粒子物理中，对称性可以被特定的相互作用破坏。

仅有不破坏对称性的相互作用才会具有和该对称性相应的守恒量。

注意：考虑具体的相互作用时，只有实验（不是理论）可以最终确定某个量子数是否守恒。

2. 变换和对称的分类

无论什么样的对称现象，都是与把两种不同的情况相比较分不开的。

一个球具有绕球心的旋转对称性，这是把球在转动前和绕球心转某一角度后的情况进行比较而得出的结论。

在数学上，将两种情况间通过确定的规则对应起来的关系，称为从一种情况到另一种情况的变换。

物理学中对称性的观念可以概括为：
"如果某一现象或系统在某一变换下不改变，则说该现象或系统具有该变换所对应的对称性。"

既然每一种对称性都和某种特定的变换相联系，那么对称性的千差万别也就集中反映在与之相联系的各种变换上。

因此，可以将对称性根据
变换所涉及的对象以及变换的性质
来进行分类。

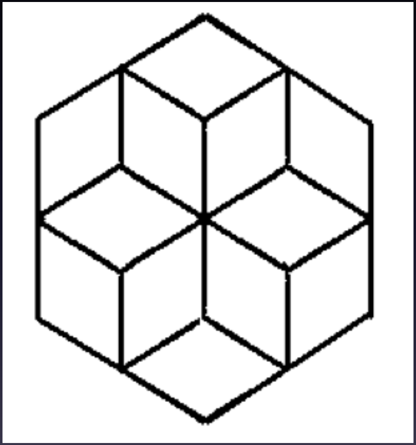
对空间性质进行变换所对应的对称性统称为空间对称性；

对时间性质进行变换所对应的对称性统称为时间对称性。

空间对称性和时间对称性是最基本、最常见的对称性，但并不是所有的对称性都能归入到这两类对称性之中。

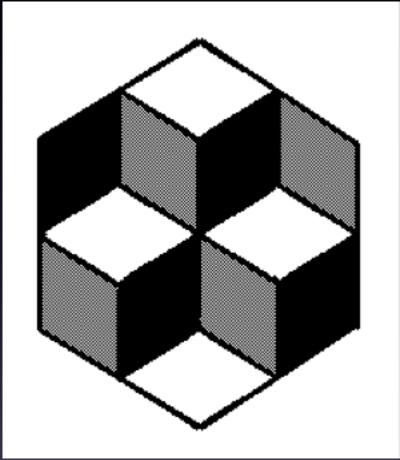
现在来看由 12 个菱形构成的正六角形的平面图形。它具有如下的对称性：

- 在平面上，绕图形中心转 60 度角的任意整数倍，图形不变；
- 绕过图形中心并过六边形的一个角或一个边的中点的轴线转 180 度，图形不变。



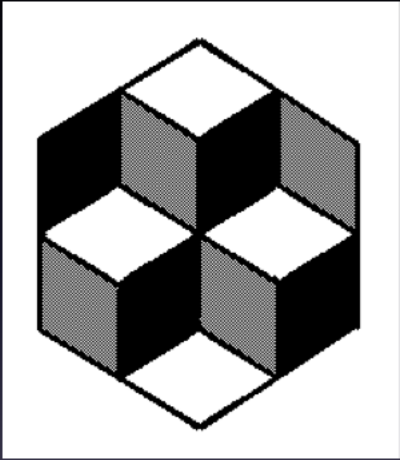
如果将图形中的菱形分别涂上灰、黑、白三种颜色，则原来所具有的许多对称性便破缺了。

这时只剩下在平面上绕图形中心转 180 度角时，图形不变。



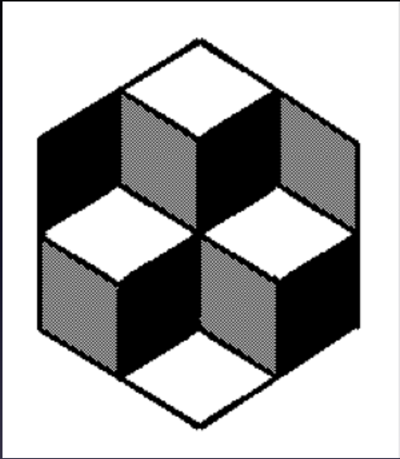
但正是由于有了颜色，图形又显现出新的对称性来：

在平面上将图形绕中心转 60 度角，然后把灰变成黑，黑变成白，白变成灰。在这样的复合变换下，原图形完全不变。

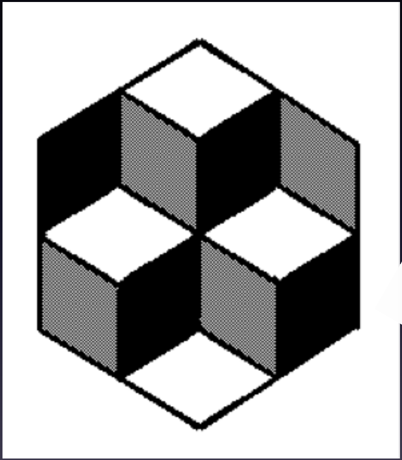


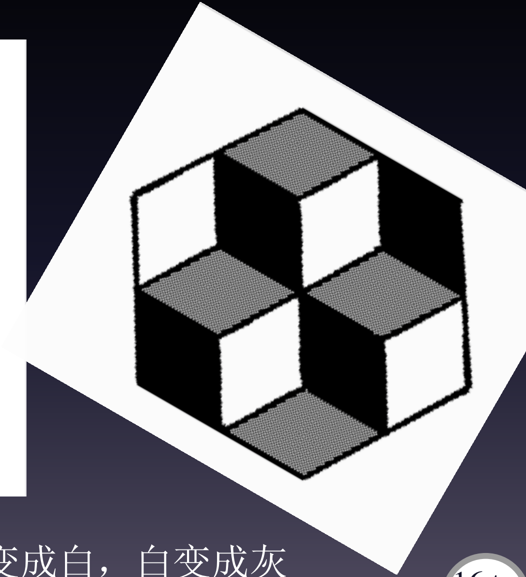
但正是由于有了颜色，图形又显现出新的对称性来：

在平面上将图形绕中心转 60 度角，然后把灰变成黑，黑变成白，白变成灰。在这样的复合变换下，原图形完全不变。



1. 旋转 60 度



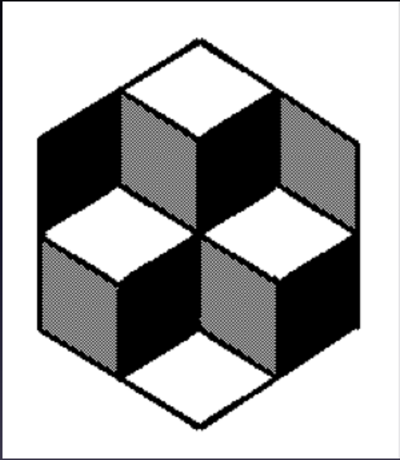


2. 灰变成黑，黑变成白，白变成灰

以图形左右两个边的中点连线为轴转 180 度，然后再把黑色和灰色互换。

在这样的复合变换下，原图形也是完全不变的。

类似的复合变换也共有 3 个。



这些复合变换涉及的不仅是空间性质，还涉及到颜色。颜色是物体的一种基本属性，原则上它与物体的空间性质是互换独立的，通过颜色体现的变换不能简单地用某种空间变换来替代。

由此可见，各种物体的性质及其运动的不同，不仅体现在对空间和时间的描述上，还体现在一些与空间和时间的描述相独立的其它性质上。

物理学中把通过与空间和时间相独立的其它性质的变换所体现的对称性，统称为内部对称性。

在宏观物理学的范围里，内部对称性常常具有很大的直观性，因此认识其存在并没有很大困难。

在微观范围里，内部对称性的直观性减弱了，这并不表明内部对称性的重要性减少了。

事实上，随着物理学对微观世界的探索日益深入，认识到的内部对称性也愈来愈多。

2. 守恒量的一般性质

1）有没有经典对应

2）相加性守恒量和相乘性守恒量

3）严格守恒和近似守恒

1. 有没有经典对应

在对物质运动基本规律的探讨中，守恒定律的研究占了重要的地位。

从历史发展过程来看，无论是经典物理学还是近代物理学，一些重要的守恒定律常常早于普遍的运动规律而被认识到。

质量守恒、能量守恒、动量守恒、角动量守恒、电荷守恒、就是人们最早认识的一批守恒定律。

这些守恒定律的确立为人们认识普遍运动规律提供线索和启示，从而对于最终认识普遍运动规律是不可缺少的重要环节。

能量、动量、角动量、电荷、……等是在经典物理学中就已熟知的守恒量。

微观物理学中，特别是在粒子物理学中，除了这些守恒量之外，还出现许多新的守恒量，如同位旋、奇异数、粲数、底数、顶数、轻子数、重子数、P 宇称、C 宇称、G 宇称、CP 宇称…等。

微观物理学中遇到的守恒量。从其与经典物理学的关系来说，又可以区分两类：

- 有经典对应的守恒量。
  能量、动量、角动量、电荷等都是在经典物理学的研究中早已熟知的守恒量，它们都属于有经典对应的守恒量。

  有经典对应的守恒量都是相加性守恒量。

- 无经典对应的守恒量。
  同位旋、奇异数、粲数、底数、顶数、轻子数、重子数、P 宇称、C 宇称、G 宇称、CP 宇称都是无经典对应的守恒量。

2. 相加性守恒量和相乘性守恒量

从守恒量的数学表述来看，基本的守恒量可以区分为两大类：

- 第一类守恒量，一个复合体系的总守恒量是其各组成部分所贡献该守恒量的代数和；

  能量、动量、角动量、电荷、同位旋、奇异数、粲数、底数、轻子数、重子数都是相加性守恒量

- 第二类守恒量，一个复合体系的总守恒量是其各组成部分所贡献该守恒量的乘积。

  P 宇称、C 宇称、G 宇称、CP 宇称都是相乘性守恒量

这两类守恒量可以分别称为相加性守恒量和相乘性守恒量。有经典对应的守恒量都是相加性守恒量，相乘性守恒量都是无经典对应的守恒量

3. 严格守恒和近似守恒

既然守恒定律的表现形式为一个孤立系统某物理量的总量在运动过程中不随时间改变，那么守恒定律的成立与否就直接和孤立系统的运动规律有关，特别是与相互作用有关。

从这个关系上来考察，又可以把守恒定律分为两类，从而守恒量也分为两类。

- 如果一个守恒定律对各种相互作用都成立则称为严格守恒定律；
- 如果一个守恒定律对某些相互作用成立，但对另一些相互作用则不成立，并且在运动过程中后者的影响是次要的，则称为近似守恒定律（或部分守恒定律）。

按照上述区分，能量、动量、角动量、电荷是有经典对应的相加性严格守恒量；

同位旋、奇异数是无经典对应的相加性近似守恒量；

P 宇称、C 宇称、G 宇称、CP 宇称是无经典对应的相乘性近似守恒量。

3. Noether 定理 (1915)

1）经典物理中的 Noether 定理

2）量子力学中的 Noether 定理

3）群的不变性和守恒定律的讨论

4）分立对称性和复合对称性

1. 经典物理中的 Noether 定理

当人们熟悉了对称性的观念之后，便想要弄清对称性和自然规律的关系是甚么，如何通过已经观察到的对称性来探究未知的规律。

守恒定律与物理学运动规律在一定的变换下的不变性有密切联系，物理学在这方面探索的一个重要进展是建立了 Noether 定理。

这个定理首先是在经典物理学中给出的，后来推广到量子物理范围内也普遍证明了。

Noether 定理：

“如果运动规律在某一不明显依赖于时间的变换下具有不变性，必相应存在一个守恒定律。”

现在我们先在经典物理学的范围里来考察。一个质点组的运动规律可以通过变分原理表出：

$$\delta S = \int \delta L(q_i, \dot{q}_i) dt = 0$$

这个变分给出运动方程为

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

如果运动规律在某一不明显依赖于时间的连续变换下不变，这个变换用一个连续参量 ξ 来描写，它直接施于对质点组运动描写的广义坐标 q_i，则运动规律的不变性可表为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \xi} \right) \delta\xi dt \\ &= \int \frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi}\delta\xi dt \right) = 0\end{aligned}$$

由于这个等式对连续参量 ξ 的任意变分都是成立的，这要求

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi} \right)}_{\text{守恒量}} = 0$$

Noether 定理在说明必相应存在一个守恒定律的同时，也把这个守恒量具体给出来了。

如果能保持运动规律不变的连续变换就是直接施于时间 t 的，上面的推导要略为改变，这时

$$\delta S = \int \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

其中

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \xi} \delta \xi$$

由于 q_i 是 t 的函数，而变换是通过 t 而施加于 q_i 的，因此必需考虑变换参量 ξ 随 t 的变化，从而有

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q}{\partial \xi} \delta \xi \right) = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial q_i}{\partial \xi} \frac{d}{dt} (\delta \xi)$$

运动规律的不变性可表为

$$\delta S = \int \left[\frac{dL}{dt}\frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) \right] \delta\xi dt = 0$$

如果考虑的是时间原点平移不变性 $t = t' + \xi$，尽管这个变换是直接施于时间 t 的，但这变换还是不明显依赖于时间的，表现在描写变换的参数 ξ 不随时间 t 而变化。由此得到

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = 1$$

这样 $\delta\xi = 0$ 给出守恒定律

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

守恒量

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

的物理意义是系统的总能量。

如果 H 通过系统的广义坐标 q_i 和广义动量 p_i 表出，则 H 就是系统的哈密顿量。

2. 量子力学中的 Noether 定理

现在我们再在量子力学范围内来讨论和证明这个定理。

在量子力学中，任一系统的运动规律由系统的哈密顿量 H 来描写，并且一个不显含时间 t 的物理量是守恒量的充分必要条件是与 H 可以对易。

利用这个性质下面对连续变换和分立变换的情形分别进行讨论和证明。

连续变换

连续变换：描述系统所处的状态常需要许多参量，例如系统所处的时间，对应系统各自由度的量(系统质心的空间坐标、对标准参考系的转角等)。

此外为反映微观粒子内部属性还有一些类似的量，例如同位旋空间的方位角等内部自由度。

一般说来，这种描述系统运动状态的量称为运动参量。

对于一个连续变换，总可通过引入一个连续变化的运动参量 ξ 来描写。一般说来，哈密顿量 H 是 ξ 的函数 $H(\xi)$。

连续变换即表现为 ξ 改变为 $\xi + d\xi$，其中 $d\xi$ 可以取任意值并且可以连续地趋于零。

如果运动规律在这变换下不变，则应有

$$H(\xi + d\xi) = H(\xi)$$

由此给出

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0$$

对任意态 $|\psi\rangle$ 有

$$\frac{\partial}{\partial\xi}H|\psi\rangle = H\frac{\partial}{\partial\xi}|\psi\rangle$$

亦即对 ξ 的偏微商算符与哈密顿量 H 对易，但它是一个反厄米算符，它的本征值不一定是实数。引入

$$p_\xi = -i\frac{\partial}{\partial\xi}$$

它是一个厄米算符，并且与哈密顿量 H 对易，因此 p_ξ 是一个守恒物理量。

这样我们在连续变换的情况下证明了 Noether 定理：
当哈密顿量 H 与连续运动参量 ξ 无直接依赖关系时，p_ξ 是守恒量。

在经典物理学中，我们早已熟知的结果是：对应于循环坐标 ξ 的广义动量 p_ξ 是守恒量。

上述的证明则把这个结果推广到对任意连续运动参量的情形，并在量子力学的基础上加以证明。

Symmetries and Conservation Laws

★Suppose physics is invariant under the transformation

$$\psi \rightarrow \psi' = \hat{U}\psi$$

e.g. rotation of the coordinate axes

•To conserve probability normalisation require

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\hat{U}\psi|\hat{U}\psi\rangle = \langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi\rangle$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{U}^\dagger\hat{U} = 1}$$

i.e. $\hat{U}$ has to be **unitary**

•For physical predictions to be unchanged by the symmetry transformation, also require all QM matrix elements unchanged

$$\boxed{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \langle\psi'|\hat{H}|\psi'\rangle} = \langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}|\psi\rangle$$

i.e. require $\hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U} = \hat{H}$

$\times\hat{U}$ $\hat{U}\hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H} \rightarrow \hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H}$

therefore $\boxed{[\hat{H},\hat{U}] = 0}$

$\hat{U}$ **commutes with the Hamiltonian**

★Now consider the infinitesimal transformation (ε small)

$$\hat{U} = 1 + i\varepsilon\hat{G}$$

($\hat{G}$ is called the **generator** of the transformation)

- For $\hat{U}$ to be unitary

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = (1+i\varepsilon\hat{G})(1-i\varepsilon\hat{G}^\dagger) = 1+i\varepsilon(\hat{G}-\hat{G}^\dagger)+O(\varepsilon^2)$$

neglecting terms in ε^2 $\quad UU^\dagger = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{G}=\hat{G}^\dagger}$

i.e. $\hat{G}$ is Hermitian and therefore corresponds to an observable quantity G !

- Furthermore, $\quad [\hat{H},\hat{U}]=0 \quad \Rightarrow [\hat{H},1+i\varepsilon\,\hat{G}]=0 \quad \Rightarrow [\hat{H},\hat{G}]=0$

But from QM $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{G}\rangle = i\langle[\hat{H},\hat{G}]\rangle = 0$

i.e. G is a conserved quantity.

Symmetry ⟷ Conservation Law

★ **For each symmetry of nature have an observable <u>conserved</u> quantity**

<u>**Example:**</u> Infinitesimal spatial translation $\quad x \to x+\varepsilon$

i.e. expect physics to be invariant under $\quad \psi(x) \to \psi' = \psi(x+\varepsilon)$

$$\psi'(x) = \psi(x+\varepsilon) = \psi(x) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\varepsilon = \left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)$$

but $\quad \hat{p}_x = -i\frac{\partial}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \psi'(x) = (1+i\varepsilon\hat{p}_x)\psi(x)$

The generator of the symmetry transformation is $\hat{p}_x$ $\Rightarrow$ p_x is conserved

- **Translational invariance** of physics implies **momentum conservation !**

- In general the symmetry operation may depend on more than one parameter

$$\hat{U} = 1 + i\vec{\varepsilon}.\vec{G}$$

For example for an infinitesimal 3D linear translation : $\vec{r} \to \vec{r} + \vec{\varepsilon}$

$$\longrightarrow \quad \hat{U} = 1 + i\vec{\varepsilon}.\vec{p} \qquad \vec{p} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$$

- So far have only considered an infinitesimal transformation, however a finite transformation can be expressed as a series of infinitesimal transformations

$$\hat{U}(\vec{\alpha}) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + i\frac{\vec{\alpha}}{n}.\vec{G}\right)^n = e^{i\vec{\alpha}.\vec{G}}$$

Example: Finite spatial translation in 1D: $x \to x + x_0$ with $\hat{U}(x_0) = e^{ix_0\hat{p}_x}$

$$\left(p_x = -i\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\begin{aligned}
\psi'(x) = \psi(x+x_0) &= \hat{U}\psi(x) = \exp\left(x_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi(x) \\
&= \left(1 + x_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{x_0^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \ldots\right)\psi(x) \\
&= \psi(x) + x_0\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + \frac{x_0^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \ldots
\end{aligned}$$

i.e. obtain the expected Taylor expansion

分立变换

还可以存在另一种变换——分立变换。
在量子理论中，分立变换的不变性导致存在一个守恒量，这类守恒量在经典理论中是不存在的。

分立变换不能用一个运动参量的连续变化来描写，因此我们应直接讨论分立变换本身。如果在分立变换 U 下哈密顿量 H 不变，即

$$UHU^{-1} = H$$

或通过对任意态 $|\psi\rangle$ 表出为

$$UH|\psi\rangle = HU|\psi\rangle$$

这表明 U 和 H 对易，

$$[H, U] = 0$$

也就是说 U 本身就是一个守恒量。

这样在分立变换的情况下证明了 Noether 定理：

当哈密顿量 H 在分立变换 U 下不变时，U 本身就是一个守恒量。

根据 Noether 定理，可以用运动规律所满足的对称性来对相应的守恒量进行分类。

如果对称性是属于场和粒子的时空性质的某种变换，称为时空对称性，相应的守恒量称为时空对称性守恒量。例如，

- 时间平移不变性决定能量守恒；
- 空间平移不变性决定动量守恒；
- 空间转动不变性决定角动量守恒；
- 空间反射不变性决定 P 宇称守恒，

这些都是时空对称性守恒量。

时间反演变换 T 本身是直接施于时间的，运动规律满足时间反演变换不变性并不表明存在相应的守恒定律和守恒量。

如果对称性是属于场和粒子的独立于时空性质的某种变换，则称为内部对称性，相应的守恒量称为内部对称性守恒量。

电荷，同位旋，奇异数，粲数，底数，顶数，重子数，轻子数，C 宇称，G 宇称等都属于内部对称性守恒量。

3. 群的不变性和守恒定律的讨论

按照 Noether 定理，每一个保持运动规律不变的变换都对应存在一个守恒量。

连续变换不变性所给出的是相加性守恒量；
分立变换不变性所给出的是相乘性守恒量。

现在需要考察的是：如果一个变换是某一个变换群的元素，运动规律不仅对这一个特定的变换，而且对这个变换群中一切元素所代表的变换都是不变的时，相应的守恒量具有什么性质。

我们看一个例子。

如果运动规律在绕空间某一轴的转动下不变，则角动量在这轴上的投影是守恒量；

如果运动规律在绕空间某一点的转动下不变，则角动量在过这点的任意轴上的投影都是守恒量。

这样似乎有无穷多个守恒量，然而实际上独立的只有三个，可以取作角动量沿某一直角坐标架三个轴的投影，角动量沿任一轴的投影都可以表成它们的线性组合。

从数学上看，这是因为绕空间某一点的转动构成一个三维转动群，即 $SO(3)$ 群。

这个群中的任一元素，即绕空间任一轴的转动，都可以通过一组三个参数来描写，从而决定了存在且只存在三个互相独立的守恒量。

一般说来，如果运动规律在某一李群 G 变换下不变，群 G 的维数为 m，即群 G 中任意元素都对应 m 个群参数的一组值，则对应 m 个群参数

$$\xi_i, \ \ i = 1, \cdots, m,$$

将有 m 个守恒量 I_i ，又称守恒荷。

李群

李群是一类连续变换群的统称。连续变换可以用一组连续变化的实参量来描写，这些实参量都等于零的变换是李群 G 的单位元，相当于不变。这些实参量称为群参数。

如果描写李群 G 的变换所用的一组实参量共有 m 个，则称群 G 的维数为 m。

因此，三维空间原点平移变换群的维数是 3，三维转动群的维数也是 3。

值得注意的是，守恒荷的个数等于生成元的个数，守恒荷与生成元是一一对应的，同时守恒荷既与具体表示无关又与时空坐标无关，它们之间满足与生成元相同的李代数关系。

因此这些守恒荷与生成元在数学上同构，实际上就是生成元在理论中的具体形式。正因为如此，我们都用 I_i 来标记。

如果考虑的是秩为 r的 m 阶李群变换的不变性，则虽然要求有 m 个守恒荷存在，但在其中只有 r 个可以互相对易，即在量子理论中只有 r 个可以同时测量。

例如对于三维空间转动不变性，需要用 $SO(3)$ 群描写，生成元即角动量的 3 个分量，它们都是守恒荷。但由于 $SO(3)$ 群的秩 $r=1$，同时可以测量的只是其中之一。

4. 分立对称性和复合对称性

如果运动规律在某一分立群 G 变换下不变，则群 G 的每一个元素都是守恒量。

群 G 的单位元是显然的守恒量，它对任何系统的本征值都是 $+1$，作为一个相乘性守值量在物理上不带来任何使人感兴趣的后果。

因此如果群 G 共有 n 个元素，则有 $n-1$ 个物理上有意义的守恒量，然而只有相互对易的守恒量才可以同时测量。

粒子物理学中最常见的分立对称群是二阶循环群，它除了单位元之外只有一个元素 U，并满足 $U^2 = 1$，因此每一个这类对称群只提供一个物理上感兴趣的相乘性守恒量。

例如 P 宇称、C 宇称都是这样的守恒量。

如果运动规律在两个群 G 和 G' 变换下分别都是不变的，且 G 和 G' 都是分立群。则由群 G 和 G' 生成的群 G'' 也是一个分立群。并且运动规律在群 G'' 变换下也是不变的。

群 G'' 的元素由群 G 和 G' 的元素相乘组成，是一个复合的守恒量。

在强相互作用和电磁相互作用下，C 宇称和 P 宇称都是守恒的，CP 宇称也是守恒的，CP 宇称就是一个复合守恒量。

如果运动规律在两个群 G 和 G' 变换下分别都是不变的，其中 G 是某种内部对称性的连续群，G' 是分立群，则运动规律在 G 和 G' 生成的群 G'' 变换下也是不变的。

值得注意的是在群 G 变换下的不变性对群 G' 变换不变性所给出的守恒量的影响。

令 I 是 G 的一个生成元，从而是一个相加性守恒量；U 是 G' 的一个元素，从而是一个相乘性守恒量；并且 I 和 U 对易，从而可以同时测量。我们可以重新定义一个分立变换

$$U' = Ue^{i\alpha I}$$

其中 α 是一个实常数，一个最简单的情形是 $\alpha = \pi$，这样定义的 U' 仍是一个守恒量。

如果对任一系统守恒量 U，宇称的值是利用其守恒性质从实验中总结出来的，则上面给出的 U 和 U' 都满足同样的守恒性要求。

换言之，如果已经定出各粒子和粒子组成的系统的 U 值，我们也可以重新定义 U 宇称为上式给出的 U' 值，所有物理上的守恒要求都仍然满足。

从这个意义上说，U 宇称定义为 U 值还是 U' 值是等价的，这个等价性成立的条件是：对于 U 守恒的相互作用来说，I 是相加性守恒量。

当然，如果 I 是相加性严格守恒量，这个等价性当然成立。

在粒子物理学中，实际上存在许多互相对易的相加性守恒量，如电荷、重子数、轻子数等，这就使每一个相乘性守恒量的定义上都可能具有这种很大的不确定性。

这种不确定性称为宇称的相对性 (这里“宇称”是相乘性守恒量的统称，不仅限于空间反射变换所定义的 P 宇称)，P 宇称就具有这种相对性。

如果一个系统，其所有内部相加性守恒量都等于零，则称为 Majorana 系统或纯中性系统。

对于纯中性系统，$U = U'$，亦即宇称的不同定义给出相同的值。这表明：纯中性系统具有绝对的宇称值。

为了去除宇称的相对性带来的不确定性，粒子物理学中针对各种不同的相加性守恒量，作一些共同的约定。

小结

- 对称性：时空对称性和内部对称性
- Noether 定理：在量子力学中，任一系统的运动规律由系统的哈密顿量 H 来描写，并且一个不显含时间 t 的物理量是守恒量的充分必要条件是与 H 可以对易。
- 连续变换不变性所给出的是相加性守恒量；分立变换不变性所给出的是相乘性守恒量。
- 令 I 是 G 的相加性守恒量；U 是 G' 的一个相乘性守恒量；并且 I 和 U 对易，从而可以同时测量。可以重新定义一个分立变换

$$U' = Ue^{i\alpha I}$$

其中 α 是一个实常数，这样定义的 U' 仍是一个守恒量。