$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} & 0 \\ \sin\theta e^{+i\varphi} & 0 & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ 0 & \sin\theta e^{+i\varphi} & -\sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1.150}$$

§10. 光子的发射与吸收

10.1 爱因斯坦的受激辐射理论

原子发射和吸收电磁辐射的量子理论是玻尔(N.Bohr)1913年提出来的。他假设：

(1) 原子存在一系列定态，定态的能量取离散值 E_1、E_2、E_3、…(能级)，原子在定态中不发射也不吸收电磁辐射能。

(2) 当原子在能级 E_1、E_2 之间跃迁时，以发射或吸收特定频率 ν 光子的形式与电磁辐射场交换能量。光子的频率满足下式：

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}, \tag{1.151}$$

上式称为玻尔频率条件，式中 h 为普朗克常量。

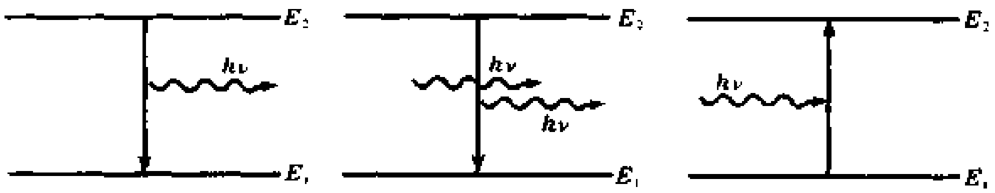
一个孤立的光子体系，在 $k_B T \ll m_e c^2$(m_e 为电子的静质量)时，由于光子与光子之间无直接相互作用，不会趋向热平衡。所以只有存在与光子发生相互作用的其它实物体系，如原子体系时，光子系统才能达到平衡分布。

1916年爱因斯坦提出，● 原子与辐射场相互作用的过程有三：

(1) 自发发射(spontaneous emission)：

在没有外部光子的情况下处在高能级 E_2 的原子自发地向低能级 E_1 跃迁，发出光子的过程(见图1-37a)。单位时间内此类跃迁的次数 N_{21} 正比于始态上原子布居数 N_2：

$$\left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{自发} = A_{21}N_2. \tag{1.152}$$



a.自发辐射　　b.受激辐射　　c.受激吸收

图1-37 三种跃迁过程

● A.Einstein, *Mittelung der Physikalischen Gesellschaft Zürich*, 18(1916), 47-62; *Physikalische Zeitschrift*, 18(1917), 121-128; 中译本：爱因斯坦文集. 第二卷. 范岱年、赵中立、许良英编译. 北京：商务印书馆. 1977. 335

(2) 受激发射(stimulated emission):

在外部相同频率光子的激励下处在高能级 E_2 的原子向低能级 E_1 跃迁,发出光子的过程(见图 1 - 37b)为受激辐射。单位时间内此类跃迁的次数 N_{21} 正比于辐射场的能量谱密度 $u(\nu)$ 和始态上原子布居数 N_2:

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{受激}} = B_{21}u(\nu)N_2. \tag{1.153}$$

(3) 受激吸收(stimulated absorbtion):

处在低能级 E_1 的原子吸收一个光子向高能级 E_2 跃迁的过程(见图 1 - 37c)为受激吸收。显然,吸收总在外部有符合玻尔频率条件的光子时发生。单位时间内此类跃迁的次数 N_{12} 正比于辐射场的能量谱密度 $u(\nu)$ 和始态上原子布居数 N_1:

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{12}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{吸收}} = B_{12}u(\nu)N_1. \tag{1.154}$$

(1.152)、(1.153)、(1.154)三式中的比例系数 A_{21}、B_{21} 和 B_{12} 称为爱因斯坦系数。

在同一对能级 E_1、E_2 之间三种跃迁过程达到细致平衡时

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{自发}} + \left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{受激}} = \left(\frac{\mathrm{d}N_{12}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{吸收}},$$

即

$$A_{21}N_2 + B_{21}u(\nu)N_2 = B_{12}u(\nu)N_1.$$

由此可解出辐射场的平衡谱分布:

$$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12}\dfrac{N_1}{N_2} - B_{21}}. \tag{1.155}$$

热平衡辐射场(即黑体辐射场)能量谱密度 $u_T(\nu)$ 的形式,最终取决于与之相互作用的原子系统的布居 N_1/N_2. 如果原子系统已达到热平衡,即其布居服从玻耳兹曼分布:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1}\exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) = \frac{g_2}{g_1}e^{-h\nu/k_B T}, \tag{1.156}$$

代入(1.155)式,我们得到热平衡辐射场的能量密度谱

$$u_T(\nu) = \frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}e^{h\nu/k_B T} - g_2 B_{21}}. \tag{1.157}$$

对于上式中的三个系数 A_{21}、B_{21}、B_{12} 之间的关系,爱因斯坦是这样论述的:

(1) 对于给定的 ν,如果 $u_T(\nu)$ 必须随着 T 的无限增大而增大(实验事实如此,见本章 1.3 节图 1 - 6),这时 $h\nu/k_B T \to 0$, $e^{h\nu/k_B T} \to 1$, B_{21} 和 B_{12} 之间必有下列关系:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}, \tag{1.158}$$

于是(1.157)式化为

$$u_T(\nu) = \frac{A_{21}/B_{21}}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \tag{1.159}$$

(2) 按照维恩根据热力学原理导出的普遍公式(1.15)，$u_T(\nu)$ 必须具有 $\nu^3\psi(\nu/T)$ 的函数形式，于是我们必须有

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} \propto \nu^3, \tag{1.160}$$

从而

$$u_T(\nu) \propto \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \tag{1.161}$$

在长波(低频)极限下

$$u_T(\nu) \propto \frac{\nu^2 k_B T}{h}.$$

与瑞利公式(1.19)

$$u_T(\nu) = \frac{8\pi}{c^2}\nu^2 k_B T$$

比较可知(1.161)式中的比例系数。[●]于是我们最终得到

$$u_T(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \tag{1.162}$$

这便是普朗克黑体辐射公式(1.27)。由此，爱因斯坦 A、B 系数之间的关系就完全确定下来了：

$$\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{21} = A_{21}. \tag{1.163}$$

以上是爱因斯坦 1916 年发表的一则对普朗克公式既简捷又漂亮的推导，这推导更重要的意义在于首次提出了“受激发射”的概念。受激发射出来的光，不仅在强度上正比于辐射场中该振荡模式的强度，而且在振荡的频率、相位、传播方向和偏振态诸方面都与辐射场中原有该模式的振荡一致。这就使相干光的取得和放大成为可能。激光是 20 世纪最重大的物理学成就之一，其应用范围之广，从测距、通讯、精密加工、外科手术，到信息存储(CD ROM)、条码判读，几乎遍及所有高科技领域，并进入了家庭和日常生活。“激光”是什么？英文是 laser，它是“light amplification by stimulated emission of radiation”词组中各字第一个字母组成的缩写，这词组的意思是“用辐射的受激发射产生光的放大”。[●] 所以，爱因斯坦提出的“受激发射”

● 在爱因斯坦的原始推导中是与维恩公式[(1.18)式]作比较的，这无关宏旨。

● 有关激光的原理，参见赵凯华、钟锡华．光学．北京：北京大学出版社．1984 年．下册．第九章 §§4～6

概念是激光的理论基础，虽然真正实现激光(首先是微波激射器)是在约40年之后。

量子概念萌生于20世纪初，但完整的量子理论建立于20年代。在此过程中间的那个时代，物理大师们常采用半经典、半量子的思维方式来处理问题。爱因斯坦对自发发射和受激发射的机制也是这样考虑的。自发发射的机制类似于天然放射性元素的衰变，无需外界激励，可以自发地进行。原子吸收光的概率正比于辐射场光的能量密度，这是可以理解的。为什么还有一种光的发射机制，也正比于外界光场的能量密度呢?爱因斯坦使用普朗克喜爱的经典谐振子模型，说由于相位的不同，外场(驱动力)对受迫振子作功可正可负。作正功时振子吸收能量，做负功时振子发射能量。所以受激发射和受激吸收是同一事物的两面，它们应遵循同样的规律。这算是受激发射的半经典解释，其量子力学解释有待10年之后。

下面我们看受激发射的量子力学解释。在本章1.6节我们曾导出光子量子态密度的公式(1.25)：

$$g(\nu)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3},$$

单位体积内有 $g(\nu)$ 个量子态，每个量子态上有 n 个光子，每个光子的能量为 $h\nu$，从而

$$u(\nu)=g(\nu)\,nh\nu=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}n. \tag{1.164}$$

从(1.152)式和(1.153)式看，单个原子受激发射跃迁的次数为 $B_{21}u(\nu)$，自发发射跃迁的次数为 A_{21}. 上式告诉我们，爱因斯坦 A、B 系数之间的关系式(1.163)意味着，

$$B_{21}\,u(\nu)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{21}n=nA_{21}. \tag{1.165}$$

(1.152)式告诉我们，N_2 个原子的自发发射率为 $A_{21}N_2$，即 A_{21} 代表单个原子的自发发射率。(1.153)式告诉我们，N_2 个原子的受激发射率为 $B_{21}u(\nu)N_2$，即 $B_{21}u(\nu)$ 代表单个原子的受激发射率。(1.165)式告诉我们，后者是前者的 n 倍，即单个原子的总发射率为 $B_{21}u(\nu)+A_{21}=(n+1)A_{21}$.

如果空间原没有光子，把光子数从0增加到1的概率记作 $P(0\to1)$。若空间已存在 n 个光子，把光子数从 n 增加到 $n+1$ 的概率记作 $P(n\to n+1)$。实际上 $P(0\to1)$ 就是自发发射率 A_{21}，$P(n\to n+1)$ 就是总发射率，它等于前者的 $n+1$ 倍：

$$P(n\to n+1)=(n+1)P(0\to1). \tag{1.166}$$

以上结果可用文字表述为：

假如在某个特定量子态中已经有了 n 个光子，原子再发射一个光子到此状态的概率，比没有光子时大了 $n+1$ 倍。

人们常常喜欢把这件事说成：

> 假如在某个特定量子态中已经有了 n 个光子，原子再发射一个光子到此状态的概率幅，比没有光子时大了 $\sqrt{n+1}$ 倍。

10.2 光子的产生算符和消灭算符

辐射场中处于同一量子态的光子是没有区别的，所以有意义的只是某个量子态上有多少个光子。令某量子态的光子数是个动力学变量，它应该是一个算符，我们将它记作 $\hat{n}$，其本征值 $n = 0、1、2、\cdots$，相应的本征矢为 $|n\rangle = |0\rangle、|1\rangle、|2\rangle、\cdots$，即

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle. \tag{1.167}$$

在自己的本征表象中算符的矩阵表现为对角的：

$$\langle n|\hat{n}|n'\rangle = n\delta_{nn'}. \tag{1.168}$$

$\hat{n}$ 的矩阵表示为

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.169}$$

上节论证了，发射光子到一个已有 n 个光子占据的量子态上的概率幅正比于 $\sqrt{n+1}$. 这概率幅实际上是两因子的乘积：一个因子是发射光子的原子的跃迁矩阵元 $\langle E_1|$原子$|E_2\rangle$，与辐射场中量子态上的光子数 n 无关；另一个因子是描述辐射场中量子态上的光子数 $n \to n+1$ 过程的矩阵元。这是什么算符的矩阵元？

在附录 A 的 §4 里引进了一种叫做“升降算符”的概念，它们是一对厄米共轭算符 $\hat{\eta}^\dagger$ 和 $\hat{\eta}$，作用在另一个算符 $\hat{A}$ 的本征态上，使它们变换到本征值增减一个常量 λ 的本征态上。这里我们需要构造的就是算符 $\hat{n}$ 的升降算符，它们的作用应使态矢的本征值增减 1. 令 $\hat{a}^\dagger$ 和 $\hat{a}$ 代表这一对升降算符，并分别称之为*产生算符*和*消灭算符*。产生算符 $\hat{a}^\dagger$ 使粒子数本征态 $|n\rangle$ 变到 $|n+1\rangle$，描述粒子的发射过程；消灭算符 $\hat{a}$ 使粒子数本征态 $|n\rangle$ 变到 $|n-1\rangle$，描述粒子被吸收的过程。用公式来表达，有

$$\begin{cases} \hat{a}^\dagger|n\rangle = C|n+1\rangle, \\ \hat{a}|n\rangle = C'|n-1\rangle, \end{cases}$$

式中 C 和 C' 是比例常量。要反映出上述发射概率幅正比于 $\sqrt{n+1}$ 的特点，常量 C 应取为 $\sqrt{n+1}$，即

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \tag{1.170}$$

或