粒子物理

第三节
狭义相对论和对撞机运动变量

曹庆宏

北京大学物理学院理论物理所

PDG 综述: KINEMATICS (运动学)

1. 狭义相对论回顾

张量简介

三维矢量:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

宇称变换（空间反演变换）:

$$\hat{\mathbf{P}}\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}$$

矢量内积:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_i b_i$$

爱因斯坦约定：相同指标代表求和

矢量内积在空间旋转和宇称变换下不变

$$\Longrightarrow \text{标量}$$

叉乘（向量积）

叉乘定义为：

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{z}$$

其中 $\hat{x}$ 是沿 x 方向的单位矢量。张量语言的叉乘：

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \epsilon_{ijk}\, a_j\, b_k$$

Levy-Civita 张量：

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & 当(i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & 当(i,j,k) = (2,1,3),(3,1,1),(1,3,2) \\ 0 & 当任意两个指标相同 \end{cases}$$

两矢量的叉乘仍然是一个矢量，但在空间反演宇称变换下不改变符号 $\Longrightarrow$ 赝矢量（轴矢量）

我们还会经常遇到一种特殊标量——赝标量

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\epsilon_{ijk}\,c_i\,a_j\,b_k$$

毫无疑问，上述矢量内积得到的是一个标量。
在空间反演变换下，它改变符号 $\longrightarrow$ 赝标量

张量符号的好处：

例 1: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) &= \partial_i(\epsilon_{ijk}\partial_j A_k)\\ &= \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k=0\end{aligned}$$

例 2：$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_k = \epsilon_{ijk}\partial_j \left(\epsilon_{klm}\partial_l A_m\right) \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m \end{aligned}$$

利用 $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$，可得

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right]_i &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m \\ &= \partial_j(\partial_l\partial_l) - \partial_j\partial_j A_i \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \end{aligned}$$

ϵ^{ijk} 性质

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon^{lmn} &= +\delta_i^l\delta_j^m\delta_k^n + \delta_i^m\delta_j^n\delta_k^l + \delta_i^n\delta_j^l\delta_k^m \\
&\quad -\delta_i^l\delta_j^n\delta_k^m - \delta_i^n\delta_j^m\delta_k^l - \delta_i^m\delta_j^l\delta_k^n \\
\epsilon_{ijk}\epsilon^{lmk} &= +\delta_i^l\delta_j^m\delta_k^k + \delta_i^m\delta_j^k\delta_k^l + \delta_i^k\delta_j^l\delta_k^m \\
&\quad -\delta_i^l\delta_j^k\delta_k^m - \delta_i^k\delta_j^m\delta_k^l - \delta_i^m\delta_j^l\delta_k^k \\
&= +3\delta_i^l\delta_j^m + \delta_i^m\delta_j^l + \delta_i^m\delta_j^l \\
&\quad -\delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^l\delta_j^m - 3\delta_i^m\delta_j^l \\
&= \delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l \\
\epsilon_{ijk}\epsilon^{ljk} &= \delta_i^l\delta_j^j - \delta_i^j\delta_j^l = 3\delta_i^l - \delta_i^l = 2\delta_i^l \\
\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk} &= 2\delta_i^i = 3!
\end{aligned}
$$

注意：不要相信你的记忆，一定要使用 Mathematica 检查你的计算

高能物理是相对论性物理

本课程中所有的物理思想和公式都是写作为洛伦兹不变形式（或相对论性不变的）。

- 微观尺度的物理规律需要使用相对论性不变的理论描述。物理学中最重要的原理之一是：任何物理规律及其预言都和具体的参照系无关。
- 高能物理中的客体的速度都接近于光速，我们必须使用狭义相对论描述它们。

$\Longrightarrow$ 协变、逆变指标和洛伦兹变换

协变和逆变矢量

每个时空点都可以用如下的逆变矢量表示：

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0;\vec{x}) = (ct;\vec{x}) = (x^0;x^1,x^2,x^3) \\ &= (ct;x,y,z), \qquad\qquad \mu = 0,1,2,3 \end{aligned}$$

希腊字母：时空变量；拉丁字母：空间变量。
定义逆变矢量内积为

$$x\cdot y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu,$$

其中平坦 Minkowski 空间的度规张量是

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

注意：

- 爱因斯坦约定：相同指标表示求和；
  这意味着——任何表达式都不会有超过两个的相同指标。通常我们将指标求和称作为指标缩并（index contraction），因为求和后的指标将从最终的公式中消失。利用这一点，我们将缩并的指标改为任意的符号。
- 度规张量指标是下标，而协变矢量指标永远在上边。

注意：

通常文献中有两种常用的度规张量：

$$\text{West Coast 约定} \quad : \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{East Coast 约定} \quad : \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

物理结论和度规张量的选取无关，但某些物理量的正负号将依赖于具体度规张量。

逆变矢量内积为

$$
\begin{aligned}
x \cdot y &= x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \\
&= \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \\
&= x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}
\end{aligned}
$$

特例：

$$x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^2 = (ct)^2 - \vec{x}^2$$

四矢量和自身的内积是一个洛伦兹不变量。任意两个四矢量的内积都是洛伦兹不变量。

虽然我们可以使用逆变矢量做计算，但每次都要引入度规张量，这太麻烦了。为了简化计算，我们引入了协变矢量。其定义如下：

$$x_\mu = (x^0; -\vec{x}) = (ct; -\vec{x})$$

注意：上式中的负号；协变指标永远写作为下标。四矢量内积此时可以记作为

$$x \cdot x \;=\; x_\mu x^\mu = (ct)^2 - \vec{x}^2 = g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu$$

利用度规张量，可以将协变矢量和逆变矢量之间转化

$$\begin{aligned} x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu, \qquad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \\ g^{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

我们定义 Kroneker delta 为

$$\delta^\mu_\nu = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

它一定是

$$\delta^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}$$

约定：分母中的逆变指标成为分子的协变指标，反之亦然。

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_\nu} \qquad\qquad g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$$

逆变导数：

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} ; \vec{\nabla} \right)$$

协变导数：

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} ; -\vec{\nabla} \right)$$

洛伦兹变换

逆变矢量在洛伦兹变换下：

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \nu} x^{\nu}$$

其中 x^{ν} 是参考系 O 中的四矢量，而 $x^{\mu'}$ 是参考系 O' 中的四矢量。两者通过洛伦兹变换 $\Lambda^{\mu'}_{\ \nu}$ 关联起来。注意：$\Lambda^{\mu'}_{\ \nu}$ 是洛伦兹 boost 和三维旋转的混合。考虑沿 z 方向的洛伦兹 boost, $\vec{\beta} = \beta\hat{z} = v/c\hat{z}$（$v$ 是 O' 相对于 O 的相对速度），则有

$$\Lambda^{\mu'}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$x^{\mu'} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{O'} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{O}$$

也即

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^3) \\ x^{1'} &= x^1 \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= \gamma(x^3 - \beta x^0) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

洛伦兹变换性质

四矢量和自身的内积是标量，因此有

$$
\begin{aligned}
x' \cdot x' &= g_{\mu'\nu'} x^{\mu'} x^{\nu'} = g_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\alpha} x^{\alpha} \Lambda^{\nu'}_{\beta} x^{\beta} \\
&= \left(g_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\alpha} \Lambda^{\nu'}_{\beta} \right) x^{\alpha} x^{\beta} \\
&= x \cdot x = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
g_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\alpha} \Lambda^{\nu'}_{\beta} &= \Lambda^{\mu'}_{\alpha} \Lambda_{\mu'\beta} = g_{\alpha\beta} \\
\left(\Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda_{\mu\beta} \right) g^{\beta\sigma} &= \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\sigma}_{\mu} = g_{\alpha\beta} g^{\beta\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \qquad \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\sigma}_{\mu} = \delta^{\sigma}_{\alpha}
$$

四矢量内积是洛伦兹标量

$$x' \cdot y' = x^{\mu'} \cdot y_{\mu'} = x^{\mu'} y^{\nu'} g_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\alpha} x^{\alpha} \Lambda^{\nu'}_{\beta} y^{\beta} g_{\mu'\nu'}$$

因此

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu'}_{\alpha} \Lambda^{\nu'}_{\beta} g_{\mu'\nu'}\, x^{\alpha} y^{\beta} &= \Lambda^{\mu'}_{\alpha} \Lambda_{\mu'\beta}\, x^{\alpha} y^{\beta} \\ &= g_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} y^{\beta} = x \cdot y \end{aligned}$$

即

$$x' \cdot y' = x \cdot y$$

四矢量的宇称变换行为

类似于 3 维情况，我们可以根据粒子在洛伦兹变换和宇称变换的行为来对各种粒子场或流 (相互作用) 进行分类。

- 洛伦兹变换和宇称变换下都保持不变的物理量——标量（S, scalar）
- 洛伦兹变换下不变，但宇称变换下变号——赝标量 (P, pseudo-scalar)

- 矢量：$V^{\mu} = (V^0; \vec{V}) \rightarrow V_P^{\mu} = (V^0; -\vec{V})$
- 轴矢量：$A^{\mu} = (A^0; \vec{A}) \rightarrow A_P^{\mu} = (-A^0; \vec{A})$
  (Axial vector)

二阶张量

$$(T')^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{\nu}T^{\mu\nu}$$

简略起见，在不产生混淆的情况下，我们忽略张量和矢量上标的“$'$”符号。

练习：

(1) 当 $T^{\alpha\beta}$ 满足上面的洛伦兹张量变换，x^{α} 遵从洛伦兹矢量变换，请验证 $T^{\alpha\beta}x_{\alpha}x_{\beta}$ 是洛伦兹不变量。

(2) 当所有指标都缩并时，$T^{\alpha\beta\gamma\cdots}x_{\alpha}x_{\beta}x_{\gamma}\cdots$ 是洛伦兹不变量。

二阶张量示例：电磁场强张量

麦克斯韦方程：

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi\rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

定义电磁四矢量势和四矢量流

$$A^\mu=(\Phi;\vec{A}) \qquad J^\mu=(\rho;\vec{J}),$$

其中

- Φ 是标势而 $\vec{A}$ 是矢势
- ρ 是电荷密度而 $\vec{J}$ 是电流密度

二阶张量示例：电磁场强张量

定义电磁场强张量

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

其具体表达式为

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

二阶张量示例：电磁场强张量

电磁场强张量也可用协变指标写出如下：

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= g_{\mu\rho}F^{\rho\sigma}g_{\sigma\nu} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu
\end{aligned}
$$

二阶张量示例：电磁场强张量

电磁场强对偶张量的定义为：

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

电磁场强张量是

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

麦克斯韦方程：张量形式

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^\mu$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

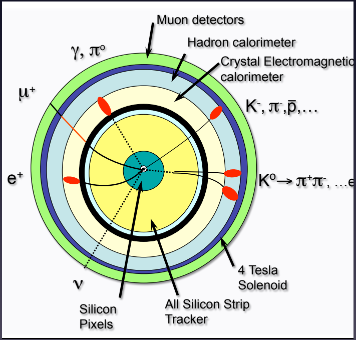
2. 相对论运动学

能量动量——四矢量

粒子物理中经常用到的四矢量：

$$p^{\mu} = (E; \vec{p}) = (E; p_x, p_y, p_z)$$

粒子的运动学性质可以通过探测器测量。



例 1: 一个质量 m 的粒子在实验室系中以速度 v 沿 x-方向运动。请给出此粒子在实验系中能量和动量。

在此粒子的静止系中，其能量为 $E' = mc^2$，动量为 $\vec{p}' = 0$。在实验室中，

$$p^0 = E = \gamma(mc^2 + v \cdot \vec{p}') = m\gamma,$$
$$p_\parallel = \gamma(p'_\parallel + |\vec{\beta}|p^{0\,\prime}) = \gamma(0 + m\beta) = m\gamma\beta,$$
$$p_\perp = p'_\perp = 0$$

从中可得：

$$\gamma = \frac{E}{m}, \qquad \beta = \frac{p}{E}$$

和

$$p^2 + m^2 = (m\gamma\beta)^2 + m^2 = m^2(1 + (\gamma\beta)^2) = m^2\gamma^2$$
$$\Longrightarrow E^2 = p^2 + m^2$$

例 2: 计算任意参考系中 $p^\mu \cdot p_\mu$

因为 $p^\mu \cdot p_\mu$ 是洛伦兹不变量，因此我们可以在任意坐标系中计算此物理量。在此粒子的静止系中，

$$p^\mu = (m; \vec{0}) \Rightarrow p^\mu \cdot p_\mu = m^2$$

当然我们也可以在是实验系中计算

$$p^\mu = (E; \vec{p}) \Rightarrow p^\mu \cdot p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

例 3: Pion 粒子衰变的寿命和衰变长度

考虑 $E = 14$ GeV 的 π^- 介子。它通过弱相互作用衰变，$\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu$。已知 π^- 介子质量是 140 MeV 和寿命是 $\tau \simeq 2.6 \times 10^{-8}$sec。计算 π^- 介子在实验室系中寿命和衰变长度。

$$\gamma = \frac{E}{m} = \frac{14 \times 10^3 \text{MeV}}{140 \text{ MeV}} = 100$$

$$\Longrightarrow t_{Lab} = \gamma\tau = 100 \times 2.6 \times 10^{-8}\text{sec}$$

$$\Longrightarrow L_{Lab} = \gamma\tau c = 780 \text{ m}$$

例 4: $\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu$ 衰变产物的能量和动量

已知 $m_\pi \simeq 140\ \mathrm{MeV}, m_\mu \simeq 106\ \mathrm{MeV}, m_\nu \simeq 0.$
令 $p_\pi = (m_\pi; 0), p_\mu = (E_\mu; \vec{p}_\mu), p_\nu = (E_\nu; \vec{p}_\nu)$。
由于动量守恒可知，在 π^- 静止系中，μ^- 和 $\bar{\nu}$ 粒子是背对背出射的。能动量守恒要求

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad & (p_\pi - \pi_\nu)^2 = (p_\mu)^2 \\
& p_\pi^2 + p_\nu^2 - 2p_\pi \cdot p_\nu = m_\mu^2 \\
& m_\pi^2 + 0 - 2m_\pi \cdot E_\nu = m_\mu^2 \\
\Longrightarrow\quad & E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = \frac{140^2 - 106^2}{2 \times 140} \simeq 30\ \mathrm{MeV}
\end{aligned}$$

因为 $m_\nu \simeq 0$，所以

$$\begin{aligned} E_\nu = 30\ \text{MeV} \quad &\Rightarrow \quad |\vec{P}_\nu| = E_\nu \approx 30\ \text{MeV} \\ \vec{p}_\nu = -\vec{p}_\mu \quad &\Rightarrow \quad |\vec{p}_\mu| \approx 30\ \text{MeV} \end{aligned}$$

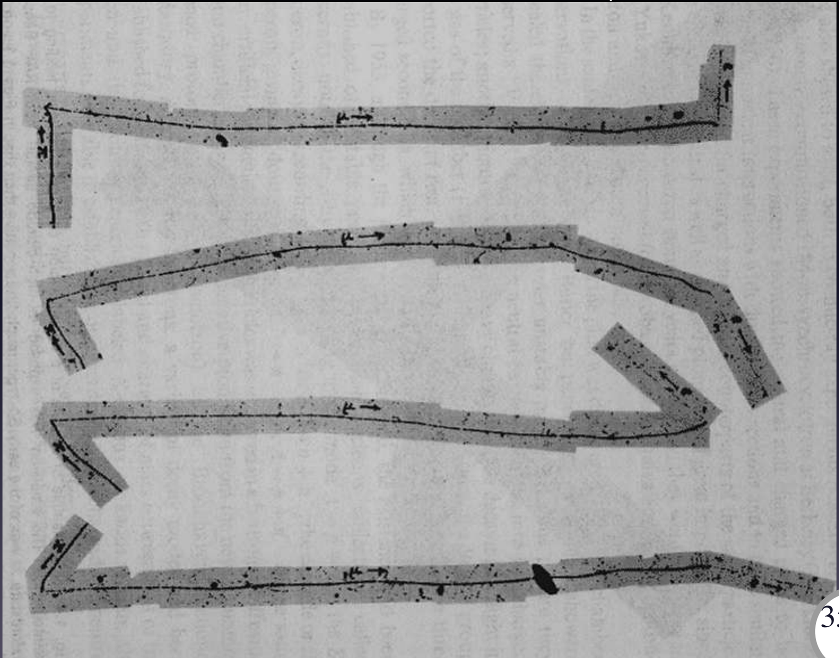
因此，

$$E_\mu \;=\; \sqrt{\vec{p}_\mu^{\,2} + m_\mu^2} \approx \sqrt{30^2 + 106^2}\ \text{MeV} = 110\ \text{MeV}$$

$$\Rightarrow \; K.E.^{\mu^-} \; = 110\ \text{MeV} - 106\ \text{MeV} = 4\ \text{MeV}$$

结论：两体衰变过程中，末态中衰变产物的能量和动量完全由衰变粒子和衰变产物的质量决定，与具体的相互作用无关。末态粒子的空间方位分布和寿命（衰变长度）与相互作用紧密相关。

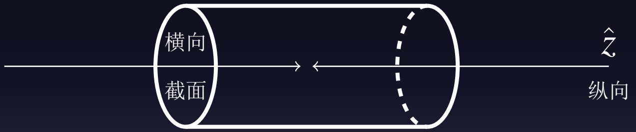
感光乳剂中的 π^- 衰变信号——发现 μ^- 粒子



探测器中的粒子动量

粒子物理学家生活在不同的时空维度：

实验家	唯象学家	理论家
2 维	≥ 3 维	≥ 10 维



设入射粒子束流方向为 z 方向，探测器在 x-y 平面上是对称的，所以我们应该将动量分解为沿着入射粒子束流方向（称之为纵向）和垂直入射粒子束流方向（即 x-y 平面，称之为横向）

$$p^\mu \equiv (E, \vec{p}_T, p_z), \qquad \vec{p}_T = (p_x, p_y)$$

横向：洛伦兹 boost 不变

- 横动量 (p_T) 不变：

$$p'_T = p_T, \;\; p_T \equiv \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = |\vec{p}| \sin\theta$$

- 横能量 (E_T)：

$$E_T \equiv E \sin\theta = \sqrt{p_T^2 + m^2 \sin^2\theta}$$

不同参照系中的横能量随 $\sin^2\theta$ 增加而变大

- 能量 (E) 和 p_T 关系：

$$E = \sqrt{m^2 + \frac{p_T^2}{\sin^2\theta}}$$

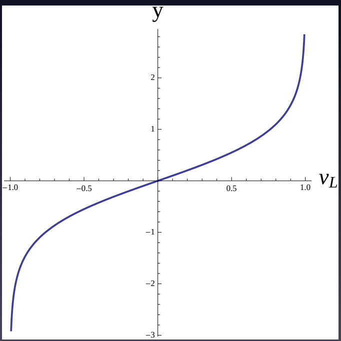
快度 (rapidity)

粒子沿着某一方向运动快慢既可以用粒子速度在该方向上的投影 v_L 描述，也可用快度 y 描述。快度定义如下：

$$\tanh y = v_L$$

从而有

$$\begin{aligned}\sinh y &= \frac{v_L}{\sqrt{1-v_L^2}}, \\ \cosh y &= \frac{1}{\sqrt{1-v_L^2}}.\end{aligned}$$



粒子的快度是速度投影的单调函数。

快度的优势和略势

快度的略势：物理上不直观

快度的优势：

- 在洛伦兹变换下

$$y = y' + \Delta \quad ,$$

  其中 Δ 描述两个坐标系之间的相对快度。显然，在比较不同参考系中粒子的运动时，采用快度比速度要便利得多。

- 不同粒子之间快度差异是洛伦兹不变的

$$y_1 - y_2 = y_1' - y_2'$$

快度的动量表示

$$y \equiv \frac{1}{2}\ln\frac{E+p_z}{E-p_z} = \tanh^{-1}\left(\frac{p_z}{E}\right) = \tanh^{-1}(\beta\cos\theta)$$

能量和动量 p_z 和快度的关系：

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{m^2+p_T^2}\cosh y \equiv m_T\cosh y \\ p_z &= \sqrt{m^2+p_T^2}\sinh y \equiv m_T\sinh y \end{aligned}$$

粒子四动量矢量是

$$p^\mu = (m_T\cosh y, \vec{p}_T, m_T\sinh y)$$

在完全共线情况（$p_T = 0$）下，

$$\gamma = \cosh y\,, \qquad \beta\gamma = \sinh y$$

快度的洛伦兹变换

下面我们验证快度的洛伦兹变换公式 $y = y' + \Delta$。不妨取特殊情况 $\cos\theta = 1$，即粒子运动方向和参考系相对运动方向相同。

设 β 是粒子在参考系 O 中速度，β' 是粒子在参考系 O' 中的速度，β^* 是参考系 O^* 相对于参考系 O 的运动速度。由速度变换公式可知

$$\beta = \frac{\beta^* + \beta'}{1 + \beta^* \beta'}$$

将 β 代入到快度定义式中

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

可得

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\dfrac{\beta'+\beta^*}{1+\beta'\beta^*}}{1-\dfrac{\beta'+\beta^*}{1+\beta'\beta^*}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta'\beta^*+\beta'+\beta^*}{1+\beta'\beta^*-(\beta'+\beta^*)} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\beta')(1+\beta^*)}{(1-\beta')(1-\beta^*)} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta'}{1-\beta'}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta^*}{1-\beta^*} \\
&= y'+y^*
\end{aligned}
$$

如何测量快度：赝快度

实验分析中常用赝快度来替代快度。赝快度定义为：

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \ln\cot\frac{\theta}{2}$$

其中 θ 角是和入射粒子束方向的夹角，实验上可以直接测量。

和快度定义相比，

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta\cos\theta}{1-\beta\cos\theta} \xrightarrow{\beta=1} \eta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

当粒子能量很高从而可以忽略其质量效应时，赝快度就等于快度。非常幸运，这正是我们要研究的情况。

快度和赝快度的转换关系

$$y = \tanh^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m^2}{|p|^2}}} \tanh \eta$$

当粒子质量远小于其能量时，

$$y \sim \eta - \frac{m^2}{2|\vec{p}|^2} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \eta - \frac{m^2}{2p_T^2} \cos\theta$$

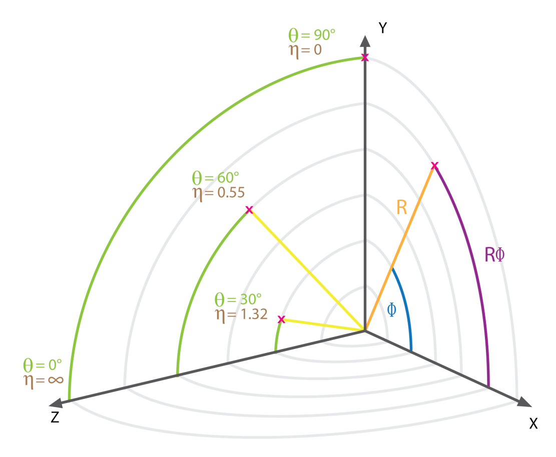
快度和角度

在高能极限下，极化角的测量可以转化为快度，但这种转化是非线性的。

$$\theta \to 0 \quad : \quad \eta \to \infty$$

$$\theta \to \pi \quad : \quad \eta \to -\infty$$

$$\theta \to \frac{\pi}{2} \quad : \quad \eta = 0$$



光锥动量坐标

课程后面要涉及极端相对论性的粒子，我们这里先介绍“光锥动量坐标”。设粒子沿着 z 方向近乎光速地运动。定义“+”和“-”光锥动量分量为

$$p^{+} = \frac{E+p_z}{\sqrt{2}}, \qquad p^{-} = \frac{E-p_z}{\sqrt{2}},$$

因此

$$\begin{aligned} p^{\mu} &= (p^{+}, p^{-}, \vec{p}_T) \\ p^{\mu}p_{\mu} &= 2p^{+}p^{-} - p_T^2 \\ p_1^{\mu}p_{2\mu} &= p_1^{+}p_2^{-} + p_1^{-}p_2^{+} - \vec{p}_{T1}\cdot\vec{p}_{T2} \end{aligned}$$

采用快度，我们有

$$p^{\pm} = \frac{m_T}{\sqrt{2}}e^{\pm y}.$$

本节内容总结：

- 张量：协变张量、逆变张量和度规张量
- 洛伦兹变换和电磁场强张量
- 对撞机运动学
  - 能动四矢量：$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$
    - 质壳条件：$p^2 = m^2 = E^2 - |\vec{p}|^2$
  - 快度:
    - 定义：$y = \frac{1}{2}\ln\frac{E+p_z}{E-p_z}$
    - 洛伦兹变换：$y = y' + y^*$
    - 能动四矢量：$p^\mu = (m_T\cosh y, \vec{p}_T, m_T\sinh y)$
    - 赝快度：$\eta = \ln\cot\frac{\theta}{2}$
  - 光锥动量：
    - $p^\mu = (p^+, p^-, \vec{p}_T)$
    - $p^\pm = \frac{E \pm p_z}{\sqrt{2}} = \frac{m_T}{\sqrt{2}}e^{\pm y}$